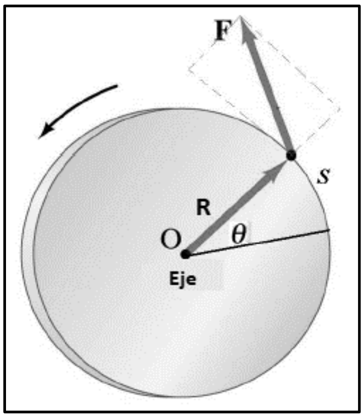
TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN.

Para poder determinar el trabajo realizado durante una rotación bajo la influencia de un momento de torsión resultante consideremos una fuerza F que actúa sobre el borde de una polea de radio R. La fuerza hace que gire un ángulo Θ mientras que el punto de aplicación de la fuerza se mueve una distancia s.

El arco s se relaciona con el ángulo Θ con la ecuación:

$s = R\,\Theta$



TRABAJO ROTACIONAL

EL TRABAJO realizado por la fuerza F esta dado por:

$T = F.\,s$; $T = F\,R\,\Theta$; pero $\zeta = F.R$ entonces;

$T = \zeta\,.\,\Theta$

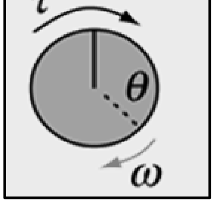
El Trabajo está dado en $[\,\mathrm{J}\,] = [\mathrm{N.m.rad}]$

TEOREMA TRABAJO – ENERGÍA Y ENERGÍA CINÉTICA ROTACIONAL

Utilizando la ecuación del trabajo rotacional:

$T_{neto} = \zeta.\theta$; $T_{neto} = (I.\alpha)\theta$; $T_{neto} = I(\alpha.\theta)$

Se sabe que: $\omega_f^2 = \omega_o^2 + 2(\alpha.\theta)$; entonces



$$T_{neto} = I\left(\frac{\omega_f^2 - \omega_o^2}{2}\right)$$

$$T_{neto} = \frac{1}{2} I\,\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\,\omega_o^2$$

El trabajo neto es igual al cambio en la energía cinética rotacional.

$$T_{neto} = \Delta Ecr$$

$$\Delta Ecr = Ecr_f - Ecr_o$$

La energía mecánica se transfiere en forma de trabajo rotacional.

ENERGÍA CINÉTICA ROTACIONAL

La energía cinética de rotación Ec_r de un cuerpo rígido cuyo momento de inercia alrededor de un eje es I y se encuentra rotando alrededor del eje con una velocidad angular ω es:

$Ect = ½\, m.V^2$; $V = R.\omega$;

$Ec_r = ½\, m\, R^2\, \omega^2$; $I = m.R^2$

$Ec_r = ½\,.\,I\,.\,\omega^2$

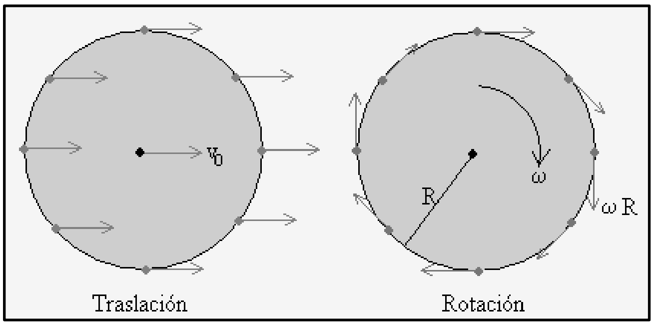
La Ec_r está dada en J

ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN Y ROTACIÓN COMBINADOS.

El principio de la conservación de la energía mecánica nos permite incluir al mismo tiempo, la energía cinética de traslación y la de rotación.
Ambas energías deben tomarse en cuenta cuando se describe el movimiento de las moléculas de un gas.

La energía cinética total de un cuerpo que rueda esta dado por la suma de todas las energías cinéticas asociadas con todas las partículas que constituye un sistema de rodamiento puro (Cuerpo que se traslada y rota sin deslizarse o frenar). Para el análisis se sobrepone el movimiento de traslación del centro de masa y el de rotación con el eje en su centro de masa.

Por lo tanto:



$Ec_{total} = Ec_{traslación} + Ec_{rotación}$

$Ec_{total} = ½\, m\, v^2 + ½\, I\,.\,\omega^2$

Como: $I = ½\, m\, R^2$ y $\omega = \dfrac{v}{R}$

$$Ec_{rotacional} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$Ec_{rotacional} = \frac{1}{4}\, m\, v^2$$

$$Ec_{rotacional} = \frac{1}{2}\, Ec_{traslación}$$

POTENCIA ROTACIONAL

LA POTENCIA de salida que desarrollan las máquinas esta dado por la rapidez con que se desarrolla el trabajo rotacional así:

Potencia = $\frac{\text{Trabajo}}{t}$; Pt = $\frac{\zeta\ \Theta}{t}$; pero: $\omega = \Theta / t$

Pt = $\zeta\ .\ \omega$

La potencia esta dado en Watt (W)

EJERCICOS RESUELTOS

1. La rueda de un vehículo Mazda de Rin 13 tiene un radio 24 cm cuyo momento de inercia es de 2 kg.m^2. Una fuerza tangencial constante de 24 N se le aplica sobre el borde. Si la rueda parte del reposo, calcular:
   a) La aceleración angular después de 4s.
   b) La potencia desarrollada por la rueda.

   a) Calculamos primero el momento de torsión:

   $\zeta = F.R$; $\zeta = (\ 24\ N\ )\ (\ 0{,}24\ m)$; $\zeta = 5{,}76$ N.m

   La aceleración angular calculamos con:

   $\zeta = I.\ \alpha$; $\alpha = \frac{\zeta}{I}$; $\alpha = \frac{5{,}76\ N\ m}{2\ kg\ m^2}$; $\alpha = 2{,}88\ rad/s^2$

   b) La potencia media podemos calcular con:

   $\omega_f = \cancel{\omega_0} + \alpha\ t$; $\omega_f = (\ 2{,}88\ rad/s^2\ )(\ 4\ s\ )$

   $\omega_f = 11{,}52\ rad/s$

   Pt = $\zeta\ .\ \omega$; Pt = (5,76 N.m) (11,52 rad/s)

   Pt = 66,35 W ; Pt = 0,09 HP

2. El motor de un Chevrolet Corsa 2002, a 3 700 rev/min tiene un momento de torsión máximo de 675 Nm. Calcular la potencia de salida del motor si opera a estas condiciones de momento máximo.

   Sabemos que:
   ω = 3 700 rev/min ; ω = 387,46 rad/s
   ζ = 675 N.m
   La potencia calculamos con

   Pt = $\zeta.\omega$; Pt = (675 N.m)(387,46 rad/s)

   Pt = 261 535,5 W ; Pt = 350,58 HP

3. Un molino de carne que es utilizado en la carnicería tiene un disco uniforme de 0,80 kg y 8 cm de radio. Se lo lleva uniformemente al reposo desde una rapidez de 1 300 rpm en un tiempo de 35 s. Calcular el momento de torsión debido al rozamiento que se opone al movimiento y el trabajo realizado por el molino.

   Sabemos que la inercia del disco es:
   $I = ½\ m\ R^2$; $I = ½\ (\ 0{,}80\ kg)(0{,}08\ m)^2$;
   $I = 2{,}56 \times 10^{-3}$ kg. m^2

   $\omega_f = 0$ rad/s ; ω_o = 1 300 rpm = 136,14 rad/s
   $\Theta = \omega_{prom}\ t$; $\Theta = ½\ (\ \omega_o + \omega_f\ )\ t$
   $\Theta = ½$ (136,14 rad/s) (35 s)
   Θ = 2 382,45 rad.

   La rueda al principio tiene Ec, pero a medida que la rueda se va deteniendo, esta energía se va perdiendo al realizar trabajo en contra de la fuerza de rozamiento, por lo que podemos escribir la ecuación:

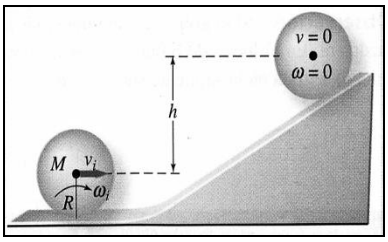
   Ec inicial = Trabajo realizado en contra del momento de torsión.

   $½\ I\ \omega^2 = \zeta\ \Theta$; $\zeta = ½\ I\ \omega^2 /\ \Theta$

   $$\zeta = \frac{1/2(2{,}56\text{x}10^{-3}\text{kgm}^2\ )(136{,}14\frac{\text{rad}}{\text{s}})^2}{2\ 382{,}45\ \text{rad}}$$

   ζ = 0,0099 N.m

4. Una bola de billar de radio 11 cm y masa M = 7,2 kg rueda sin rozamiento sobre una superficie horizontal a 2 m/s. después sube por una pendiente sin rozamiento hasta una altura h antes de alcanzar momentáneamente el reposo y volver rodando hacia atrás. Determinar h.



   La energía mecánica se conserva. La energía cinética de traslación más la energía cinética de rotación se convierte en energía potencial gravitacional, y como la bola rueda sin rozamiento $v_{cm} = R.\ \omega$; así tenemos:

   $Em_{\text{en la base}} = Em_{\text{en la parte de arriba}}$
   $Ec_{\text{traslación}} + Ec_{\text{rotación}} = Ep_g$

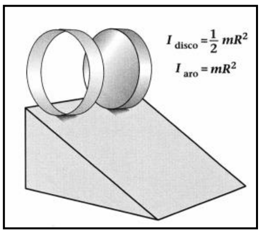
   $½\ m\ v^2 + ½\ I_{cm}\ \omega^2 = m\ g\ h$

   Si: $\omega = \frac{v}{r}$; $I_{cm} = 2/5\ m\ .\ r^2$

   al sustituir ω e I_{cm} y despejar h se tiene:
   $½\ \cancel{m}\ v^2 + ½\ (\ 2/5\ \cancel{m}\ r^2)\ (\ \frac{v}{r}\ )^2 = \cancel{m}\ g\ h$

   $$h = \frac{7\ v^2}{10\ g}\ ;\ h = \frac{7\left(2\ \frac{m}{s}\right)^2}{10\ (\ 9{,}8\frac{m}{s^2})}\ ;\ h = 0{,}29\ m$$

5. Un disco sólido uniforme de radio R y masa m y un aro del mismo radio y masa son liberados del reposo desde lo alto de un plano inclinado. Determinar cuál objeto se mueve más rápido al fondo.



Aplicamos el principio de la conservación de la energía para el disco, ya que toda la energía potencial se convierte en energía cinética de rotación y traslación y como no existe rozamiento

$\omega = \dfrac{v}{r}$

$Em_{\text{en la parte de arriba}} = Em_{\text{en la base}}$

$Ep_g = Ec_{\text{traslación}} + Ec_{\text{rotación}}$

$m\,g\,h = ½\,m\,v^2 + ½\,I_{cm}\,\omega^2$

$m\,g\,h = ½\,m\,v^2 + ½\,I_{cm}\dfrac{v^2}{R^2}$; despejamos v:

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+\frac{I}{mr^2}}} \;;$$

Constituye la velocidad del disco al fondo del plano inclinado y observamos que depende de la inercia y la masa del objeto, además de la altura que se le deja caer al objeto.

Por tanto al sustituir los valores de la inercia del disco y el aro se tiene:

$I_{disco} = ½\,mr^2$; $I_{aro} = mr^2$

$$v_{disco} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+\frac{I}{mR^2}}};\; v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+1/2}} \;;\; v = \sqrt{\frac{4\,g\,h}{3}}$$

$$v_{aro} = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+\frac{I}{mR^2}}};\quad v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1+1}} \;;\quad v = \sqrt{gh}$$

El disco a causa de su menor momento de inercia, tiene una velocidad mayor que el aro a lo largo del plano inclinado. Por lo que el disco alcanza primero el fondo.

EJERCICIOS PARA LA TAREA

1. Una masa de 2kg gira a 160 rpm en el extremo de un cordel de 50 cm de longitud. Calcular:
   a) El momento de inercia.
   b) La velocidad angular.
   c) La energía cinética rotacional.

2. Un motor desarrolla un torque rotacional de 400 Nm a 3700 rev/min. Calcular la potencia suministrada por el motor.

3. Un cilindro solido ($I = ½\,m\,r^2$) y una esfera solida de 0,50 m de radio y 2 kg de masa se liberan de la cima de un plano inclinado sin rozamiento, de 3 m de altura y 8 m de largo. Calcular la velocidad de cada uno cuando llega al fondo

4. Un anillo uniforme de 16 lb gira sobre su centro a 5 rev/s. Si su energía cinética rotacional es de 270 J. Calcular el radio del anillo.

5. Dos masas puntuales m_1 y m_2 están conectadas por una varilla ligera de longitud L. El conjunto gira alrededor de su centro de masa con una velocidad angular ω. Demostrar que la relación entre las energías cinéticas de las masas es $Ec_1/ Ec_2 = m_2 /m_1$

6. Un aro de 0,40 m de radio y 0,6 kg rueda sin rozamiento con una velocidad de 15 m/s hacia un plano inclinado de 30^0. Calcular la distancia que sube el aro por el plano inclinado.

7. Una rueda maciza de 4 kg de 0,23 m de radio está inicialmente en reposo. Calcular:
   a) El trabajo que se requiere para hacerle girar a 3 rev/s alrededor de su eje.
   b) La potencia en HP que se produce al girar 2 min.
   c) Si la energía de la rueda en rotación se duplica, determinar las revoluciones por segundo que hará.

8. Se aplica una fuerza tangencial de 11 N a un disco en reposos de masa 1,5 kg de radio 2 m, durante 6 s. Calcular:
   a) La aceleración angular, el desplazamiento angular y la velocidad angular final
   b) El trabajo realizado por la fuerza.