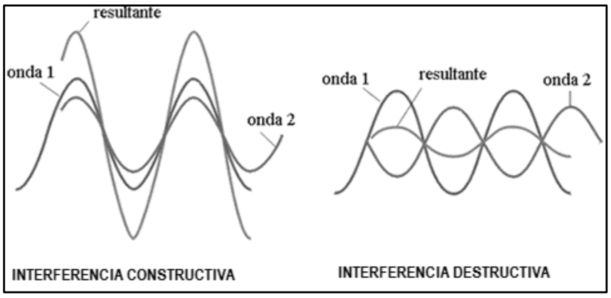
PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Hasta el momento se analizado el movimiento de una sola onda en una misma región del espacio. Ahora analizaremos que sucede cuando dos o más ondas se propagan simultáneamente a través del mismo medio. Al considerar ondas transversales en una cuerda vibrante, la velocidad de la onda está determinada por la tensión de la cuerda y de su densidad lineal y no de la fuente que la produce.

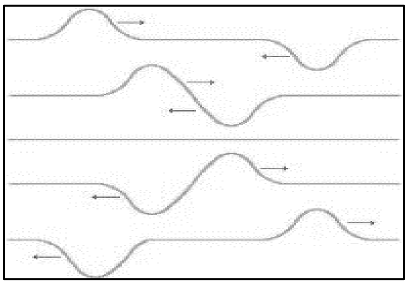
El principio de superposición se da cuando:

Dos o más ondas existen simultáneamente en el mismo medio y el desplazamiento resultante en cualquier punto y tiempo es la suma algebraica de los desplazamientos de cada onda

Cuando las ondas se propagan del mismo lado de la fuente, la superposición da como resultado una onda de amplitud mayor, es decir estas ondas interfieren constructivamente. La interferencia destructiva ocurre cuando la amplitud resultante es menor.



Cuando las ondas se propagan de lados opuestos de un medio, la superposición se da al momento que pasan justamente una a través de la otra sin afectarse mutuamente, y una vez que se han separado, sus formas y sus alturas son las mismas que antes de la superposición. El principio de la superposición hace posible que distingamos dos voces que hablan en el mismo cuarto al mismo tiempo; las ondas sonoras pasan una a través de la otra sin afectarse.



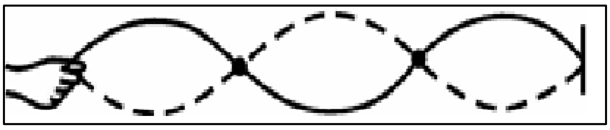
La ecuación de la Amplitud resultante de las ondas estacionarias esta dad por:

$$A_R = 2A\cos(\frac{\phi}{2})$$

ONDAS ESTACIONARIAS.

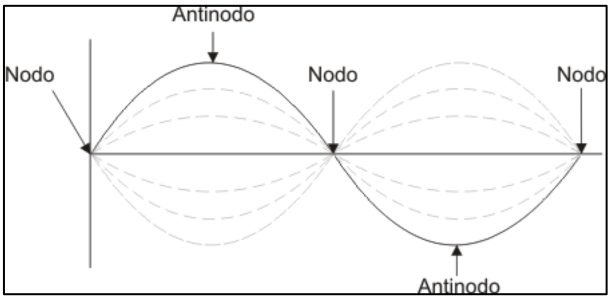
Las ondas estacionarias se presentan cuando una onda se refleja en una zona límite y la onda reflejada interfiere con la onda incidente, de modo que la onda parece permanecer estacionaria.

Consideremos una onda generada por una perturbación sobre una cuerda, que proviene desde la derecha, y se topa con un límite en el lugar donde la cuerda se sujeta, se observa que el pulso incidente al golpear a este último ejerce una fuerza vertical hacia arriba, la fuerza de reacción que ejerce el soporte tira verticalmente hacia debajo de la cuerda, originándose un pulso reflejado. Tanto el desplazamiento como la velocidad se invierten en el pulso reflejado. Es decir, un pulso que incide como una cresta se refleja como un valle propagándose con la misma velocidad en la dirección opuesta, y viceversa.



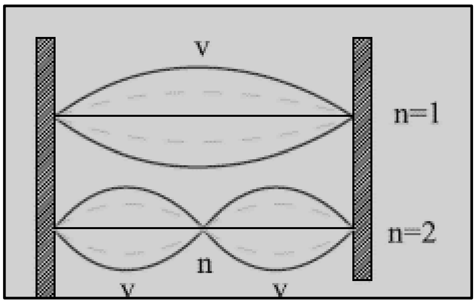
En la onda estacionaria, ciertos puntos de la cuerda no se mueven y se llaman nodos y los puntos en los que la interferencia constructiva es máxima, se denominan antinodos.

Los nodos y antinodos consecutivos están separados por media longitud de onda de la onda resultante.



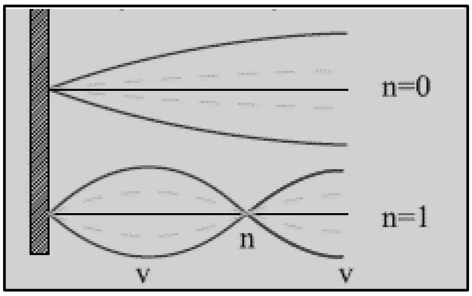
Supongamos ahora una cuerda de longitud **L.** La cuerda tiene un conjunto de modos normales de vibración, cada uno con una frecuencia característica.

Para una cuerda L sujeta por los dos extremos o un tubo cerrado por los dos extremos se tiene:



$$L = n\frac{\lambda}{2} \;;\; L = n\frac{v}{2f}$$

Para una cuerda L sujeta a un extremo o un tubo abierto por un extremo se tiene:



$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \;;\; L = (2n+1)\frac{v}{4f}$$

FRECUANCIAS EN UNA CUERDA VIBRANTE.

Ahora se consideramos las ondas estacionarias posibles que se pueden producir en una cuerda de longitud l con sus extremos fijos.

Cuando se pone la cuerda en vibración los trenes de ondas incidentes y reflejados viajan en direcciones opuestas con la misma longitud de onda.

La onda estacionaria más simple posible ocurre cuando la longitud de las ondas incidente y reflejada es igual al duplo de la longitud de la cuerda.

La onda estacionaria se da cuando existe un único vientre con puntos nodales en cada extremo, a ese patrón de vibración se le conoce como el modo fundamental de oscilación. Los nodos superiores de oscilación se dan, cuando las longitudes de onda son cada vez más cortos.

Así tenemos:

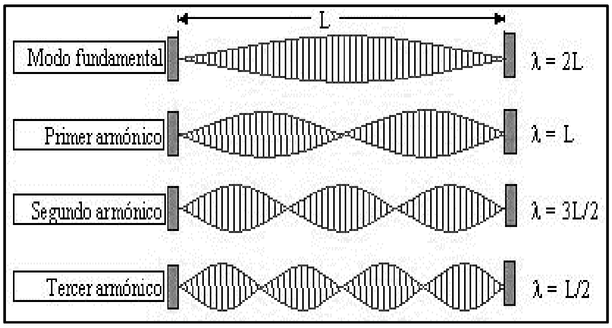
$$\lambda_1 = 2L = \frac{2L}{1}$$

$$\lambda_2 = L = \frac{2L}{2}$$

$$\lambda_3 = (2/3)L = \frac{2L}{3}$$

$$\lambda_4 = L/2 = \frac{2L}{4}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad ; n = 1,2,3,4, \ldots.$$



Las frecuencias correspondientes se calcula con:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

Quedando en forma general:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \;;\; f_n = n\frac{v}{2L} \;; n = 1,2,3,4,\ldots$$

donde v es la rapidez de propagación de las ondas transversales. Esta rapidez es la misma para todas las longitudes de onda ya que sólo dependen de las características del medio vibratorio.
Las frecuencias a las que ocurren las ondas estacionarias se denominan frecuencias naturales o resonantes, y dependen de la masa, elasticidad, geometría del medio. En función de la tensión de la cuerda F y de la densidad lineal μ, las frecuencias se pueden determinar con:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad ; \quad n = 1,2,3,4, \ldots$$

La frecuencia más baja posible (v / 2l) se llama frecuencia fundamental f_1. Las otras son múltiplos enteros de la fundamental y se las conoce como sobretonos, así:

$$f_n = n.\, f_1 \;; \quad n = 1,2,3,4, \ldots$$

La serie completa que consta de la fundamental y sobretonos, se conoce como serie armónica. La fundamental es la primera armónica, el primer sobretono ($f_2 = 2.\ f_1$) es la segunda armónica, el segundo sobretono ($f_3 = 2.\ f_2$), es la tercera armónica, y así sucesivamente.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar el ángulo de fase entre dos ondas de igual frecuencia, amplitud y longitud de onda que se superponen formando una onda de amplitud 50% mayor que las originales.

Se sabe que:

$A_R = 1,5\ A$

Por lo tanto: $A_R = 1,5\ A$

$A_R = 2A\cos(\frac{\phi}{2})$

Entonces:

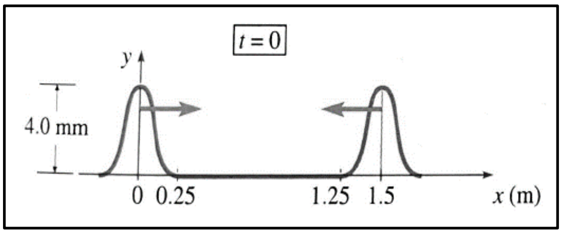
$1,5\ A = 2A\cos(\frac{\phi}{2})$

$\cos(\frac{\phi}{2}) = 1,5/2$

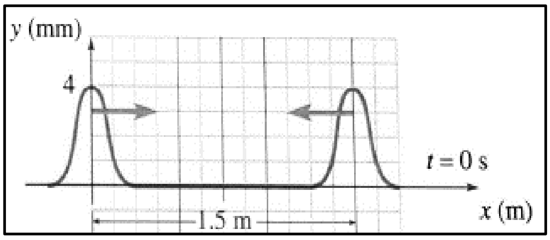
$\phi = 2\cos^{-1}(1,5/2)$

$\phi = 82,82^0$

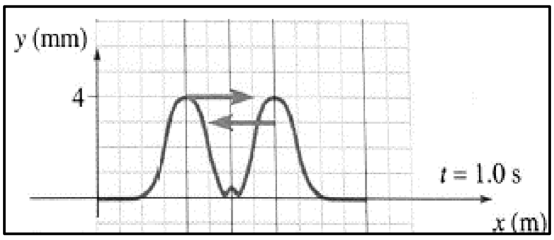
2. Dos pulsos de ondas idénticas viajan a 0,5 m/s uno hacia el otro sobre una cuerda larga. Dibujar la forma de la cuerda en t = 1 s, t = 1,5 s y t = 2s



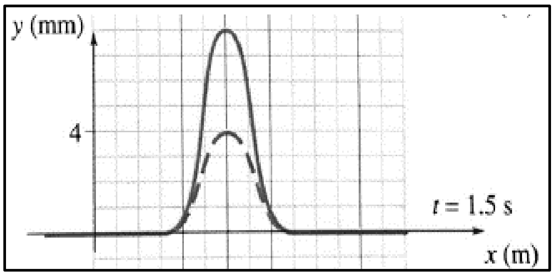
A) Se traza los pulsos de la onda en t = 0 s.



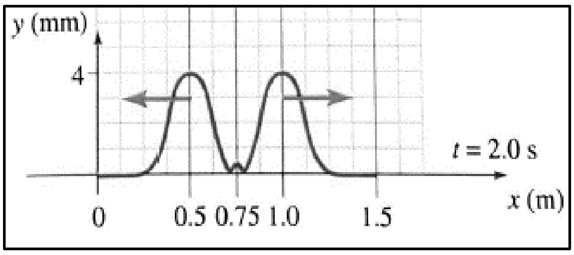
B) Luego en t = 1 s cada pulso se ha movido 0,5m en dirección al otro. Los extremos del frente de los pulsos están empezando a sobreponerse uno sobre el otro.



C) En t = 1,5 s, cada pulso se ha movido otros 0,25 m; las crestas se sobreponen exactamente. Al sumar los desplazamientos punto a punto, se puede observar que la cuerda tiene la forma de un solo pulso del doble de altura que cualquiera de los pulsos individuales.



D) En t = 2 s cada uno de los pulsos se ha movido otros 0,25 m



Es decir, los dos pulsos se superponen exactamente, el desplazamiento de los puntos sobre la cuerda es mayor que para los puntos correspondientes sobre un pulso, ya que se suman desplazamientos en la misma dirección (y>0 para ambos pulsos).

3. Una cuerda de acero para piano de 60 cm de longitud tiene una masa de 6 g y está sometida a una tensión de 420 N. Determinar las frecuencias de su modo fundamental de vibración y de sus dos sobre tonos.

Se sabe que:

l = 60 cm = 0,6 m
m = 6 g = 6 x 10 $^{-3}$ kg
T = 420 N
f_1 = ?
f_2 = ?
f_3 = ?

Determinamos μ con:

$\mu = \frac{m}{l}$; $\mu = \frac{0,006\ kg}{0,6\ m}$; μ = 0,01 Kg/m

La frecuencia fundamental se obtiene cuando n=1

$f_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$; $f_1 = \frac{1}{2(0,6)}\sqrt{\frac{420N}{0,01\ kg/m}}$;

$f_1 = 170,78$ Hz

El primer sobretono o segundo armónico es:

$f_2 = 2.f_1$; $f_2 = 2(170{,}78)$; $f_2 = 341{,}56$ Hz

El segundo sobretono o tercer armónico es:

$f_3 = 3.f_1$; $f_3 = 3(170{,}78)$; $f_3 = 512{,}34$ Hz

4. Una cuerda de violín de L = 31,6 cm de longitud y μ = 0,065 g/m de densidad lineal, se coloca junto a un altavoz alimentado por un oscilador de frecuencia variable. Se observa que cuando la frecuencia del oscilador se hace variar continuamente entre 500 y 1500 Hz, la cuerda sólo oscila apreciablemente a las frecuencias de 880 y 1320 Hz. Determinar la tensión a la que está sometida la cuerda

Se conoce que la cuerda la cuerda oscilaría apreciablemente cuando la frecuencia del sonido que le llega del altavoz sea una de las frecuencias que pueden generar ondas estacionarias en la cuerda. Esto ocurre para dos frecuencias consecutivas f1 = 880 Hz y f2 = 1320 Hz. Aunque desconocemos el valor de n se debe cumplir:

$$L = n\frac{v}{2f_1} \quad \text{y para } L = (n+1)\frac{v}{2f_2}$$

Se despeja n de la primera ecuación:

$$n = \frac{2f_1 L}{v};$$

Se la sustituye en la segunda ecuación:

$$L = \left(\frac{2f_1 L}{v} + 1\right)\frac{v}{2f_2}\ ;\ 2f_2L = 2f_1L + v$$

$$v = 2L(f_2 - f_1)$$

También se sabe que:

$$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\ ;\ T = v^2 . \mu$$

Por lo tanto:

$$T = 4\,L^2(f_2 - f_1)^2\,\mu$$

$$T = 4\,(0{,}316)^2(1320\text{-}880)^2 6{,}5 \times 10^4$$

$$T = 50{,}26 \text{ N}$$

EJERCICIOS PARA LA TAREA

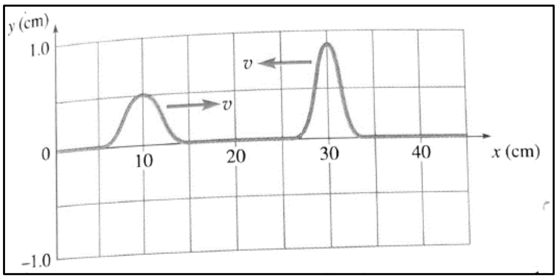
1. Una cuerda de violín tiene una longitud de 40 cm y una masa de 6 g y está bajo una tensión de 2 000 N. Si la frecuencia que percibe el oído humano está entre 20 Hz y 2 000 Hz. Determinar si es escuchado el tono de la frecuencia fundamental producida por esta cuerda al ser tocada.

2. La longitud de una cuerda de un guitarrón es de 170 cm, al hacerle vibrar con una frecuencia de 700 Hz aparecen 5 nodos incluyendo los dos extremos. Determinar la velocidad de la onda producida.

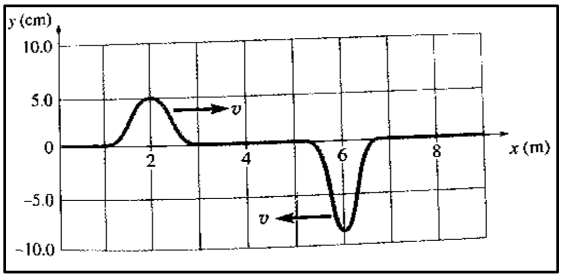
3. Dos cuerdas de un violín de igual longitud y material se ajustan a una misma Tensión. Determinar la relación entre sus frecuencias fundamentales si el uno tiene el doble de diámetro que el otro.

4. Calcular la frecuencia fundamental de una cuerda de guitarra, si dos frecuencias naturales sucesivas de esta son 600 Hz y 820 Hz.

5. Dos pulsos se mueven uno hacia el otro en una cuerda, en t = 0 s; la rapidez de cada pulso es 40 cm/s. Graficar la forma de la cuerda a los 0,15; 0,25 y 0,30 s.



6. Dos pulsos se mueven uno hacia el otro en una cuerda, en el tiempo t = 0 s; la rapidez de cada pulso es de 2,5 m/s. Graficar la forma de la cuerda a los 0,60; 0,80; 0,90 s.



7. Una onda sinusoidal viajera es el resultado de la superposición de otras dos ondas sinusoidales que son iguales en amplitud, longitud de onda y frecuencia. Cada una de las ondas componentes tiene una amplitud de 5 cm. Si la onda de superposición tiene una amplitud de 6,69 cm. Determinar la diferencia de fase entre las ondas componentes.

8. Dos ondas que se mueven por una cuerda en la misma dirección y sentido tienen la misma frecuencia de 100 Hz, una longitud de onda de 2 cm y una amplitud de 0,02 m. Determinar la amplitud de la onda resultante si las dos ondas difieren en fase de A) $\pi/6$ y B) $\pi/3$.