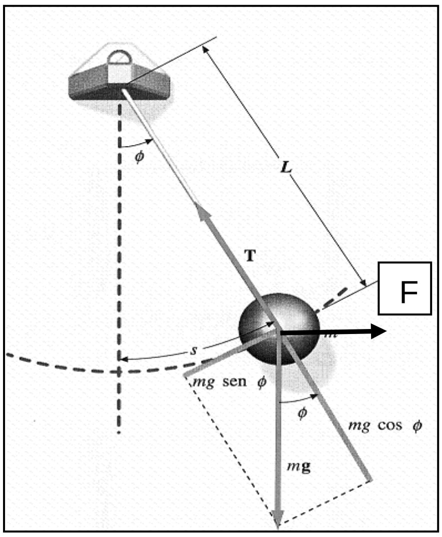
APLICACIONES DEL M.A.S.

PÉNDULO SIMPLE.



Es una masa pequeña cualquiera que está suspendida mediante un hilo inextensible o barra ligera de un punto fijo al cual se lo desplaza de su posición de equilibrio y comienza a describir de manera aproximada un M.A.S.

La masa suspendida describe una oscilación completa cuando va desde la derecha hasta la posición izquierda y luego regresa nuevamente hasta la posición de la derecha. Estas oscilaciones se producen cuando las componentes del peso interactúan durante todo el movimiento.
La amplitud (A) constituye el ángulo (Φ) formado por la cuerda del péndulo en una de sus posiciones extremas con la vertical el cual debe ser menor a 10^0.

La frecuencia (f) está dada por el número de oscilaciones descritas en la unidad de tiempo.

$$f = \frac{n}{t} \; ; \; f = \frac{1}{T} \; ; \; T = \frac{1}{f}$$

El período (T) de oscilación viene a ser el tiempo que tarda el péndulo en realizar una oscilación completa.

Aplicando el primer principio de equilibrio se tiene:

$$F = T \text{ sen } \Theta \; ; \quad P = T \cos \Theta$$

De donde: $F = P \tan \Theta$

$$F = mg\frac{x}{L}$$

$$F = m\,a$$

Igualamos las dos ecuaciones:

$$m\,a = mg\frac{x}{L}$$

$$a = g\frac{x}{L}$$

$$4\,\frac{\pi^2}{T^2}\,x = g\frac{x}{L}$$

$$T^2 = 4\,\pi^2\frac{L}{g}$$

El período del péndulo simple esta dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Donde L es la longitud de la cuerda del péndulo y g es el valor de la aceleración de la gravedad.

A partir de esta ecuación de desprenden las siguientes leyes:

El periodo de un péndulo simple es:

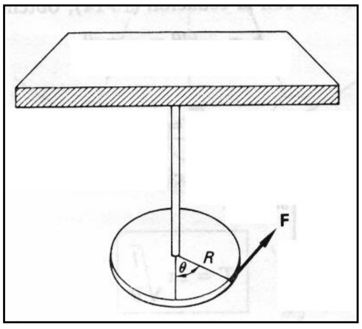
1) Directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud.
2) Inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.
3) Independiente de la masa del péndulo.
4) Independiente de la amplitud mientras sea pequeña menor a 10^0

PÉDULO DE TORSIÓN.

El péndulo de torsión es un disco o cilindro sólido sostenido por una barra delgada. Si se hace girar el disco en la medida de un ángulo Θ, el momento de torsión ζ es directamente proporcional al desplazamiento angular. De modo que:

$$\zeta = -K\,\Theta$$

K es una constante de proporcionalidad denominada constante de torsión y que depende del material del que está hecha la barra delgada.



Al soltar el disco, el torque angular produce una aceleración angular directamente proporcional al desplazamiento angular. El período del ***movimiento armónico simple angular*** producido al oscilar angularmente el disco está dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$$

Donde I es el momento de inercia del disco que oscila y K la constante de torsión.

Sabemos que :

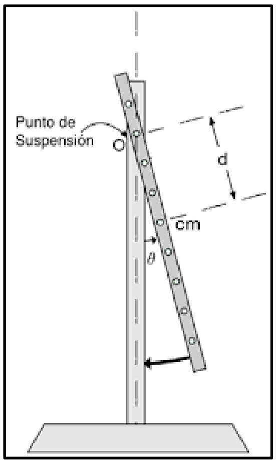
$$\zeta = -K\Theta \quad y \quad \zeta = I.\alpha$$
$$-K\Theta = I.\alpha$$
$$\frac{I}{-K} = \frac{\Theta}{\alpha}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{\alpha}}$$

Donde Θ es el desplazamiento angular (rad) y α es la aceleración angular del disco (rad/s^2)

PÉNDULO FÍSICO

Constituye el sistema en el cual un cuerpo rígido gira libremente alrededor de un eje horizontal que no pasa por el centro de masa y oscila cuando se desplaza de su posición de equilibro.



Se observa a la figura plana con un eje de rotación situado a una distancia d del centro de masa y desplazada de su posición de equilibrio un ángulo ϕ. El momento de torsión (ζ) respecto al eje tiene como módulo *mgDsenϕ* y tiende a disminuir ϕ.
Al aplicar la segunda ley de Newton a la rotación se tiene:

$$\zeta = I.\,\alpha$$

de donde α es la aceleración angular e I es la inercia rotacional respecto al eje.
Se sabe que: $\zeta = -mgd\,sen\phi$ y que

La aceleración angular del péndulo físico estaría dada por el diferencial:

$$\alpha = \frac{d^2\emptyset}{d\,t^2}$$

Al sustituir las dos ecuaciones en la de ζ, se tiene:

$$-mgD\,sen\phi = I\,.\,\frac{d^2\emptyset}{d\,t^2}$$

Despejando el diferencial queda:

$$\frac{d^2\emptyset}{d\,t^2} = -\frac{mgd}{I}\,sen\phi$$

Cuando la oscilación es pequeña y los valores de ϕ son menores a 10 ^{0} el error cometido en los cálculos corresponde a menos del 1 %, el valor del senϕ = ϕ, entonces la ecuación queda:

$$-\frac{mgd}{I}\,sen\phi = -\frac{mgd}{I}\,\phi = -\omega^2\phi$$

La velocidad angular queda expresada por:

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} \;;\; \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

También se sabe que:

$$\omega = \frac{2.\pi}{T}$$

Al despejar el periodo T nos queda

$$T = \frac{2.\pi}{\omega} \;; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En un experimento de laboratorio, a un estudiante se le da un cronómetro, una masa m y un pedazo de cuerda. Se le pide que determine el valor de la aceleración de la gravedad g. Si él construye un péndulo de 1 m de longitud y en cuatro segundos da dos oscilaciones. Calcular el valor de g.

   El periodo esta dado por:

$$T = \frac{t}{n} \;;\; T = \frac{4\ s}{2\ osc} \;;\; T = 2\ s$$

Si $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$; $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$;

$g = \frac{4\pi^2 (1\ m)}{(2\ s)^2}$; $g = 9{,}87\ m/s^2$

2. Si el período (T_1) de un péndulo es cuatro veces del período (T) de otro péndulo. Determinar cuántas veces se ha aumentado L del péndulo de periodo T.

   Sabemos que $T_1 = 4$ T ; y $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ entonces:

$$\cancel{2}\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} = 4\left(\cancel{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right)$$

Elevando al cuadrado tenemos y simplificando g se tiene:

$$L_1 = 16\ L$$

Se debe aumentar 15 veces más la longitud L

3. Cuál es la longitud de un péndulo cuya frecuencia es de 100 oscilaciones por minuto.

   Se tiene que n = 100 osc y t = 1 min = 60s

$T = \frac{t}{n}$; $T = \frac{60\ s}{100\ osc}$; $T = 0{,}6$ s

Si, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$; $L = \frac{T^2 g}{4\pi^2}$

$L = \frac{(0{,}6\ s)^2 (9{,}8\frac{m}{s^2})}{4\pi^2}$; $L = 0{,}09$ m

4. Calcular el porcentaje que se debe variar a la longitud de un péndulo para que su período disminuya en un 30 %.

   Si disminuye en un 30 % se tiene que:

$T_f = 70\ \%\ T_o$; $T_f = 0{,}7\ T_o$

$$\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{L_f}{g}} = 0{,}7\left(\cancel{2\pi}\sqrt{\frac{L_o}{g}}\right)$$

   Elevando al cuadrado y simplificando g se tiene:

$L_f = 0{,}49\ L_o$

   Ahora calculamos la variación de longitud:

$L_f = 49\ \%\ L_o$

   Entonces debe ser 51 % menor.

5. Un reloj de péndulo funciona correctamente en una la ciudad de New York , donde la gravedad es de 9,8 m/s^2. Se lleva el reloj a la ciudad de Madrid donde se retrasa 18 s por día.

   Determinar la gravedad en la ciudad de Madrid.

   El período en New York es T_N y el período en Madrid es T_M , así:

$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_M}}$; $T_N = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_N}}$

$$\frac{T_M}{T_N} = \frac{\cancel{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g_M}}}{\cancel{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g_N}}}$$

   Elevando al cuadrado y simplificando L se tiene:

$$g_M = g_N \frac{T_N^2}{T_M^2} \quad (1)$$

   También sabemos que:

   En un día 86 400 s se atrasa 18 s

   T_N se atrasa x

$x = \frac{T_N\ 18\ \cancel{s}}{86\ 400\ \cancel{s}}$; $x = \frac{T_N}{4\ 800}$

   El T_M = T_N más el retraso:

$T_M = T_N + \frac{T_N}{4\ 800}$

$T_M = \frac{4\ 801}{4\ 800} T_N$, remplazamos en (1)

$g_M = g_N \frac{T_N^2}{\left(\frac{4\ 801}{4\ 800} T_N\right)^2}$

$g_M = (9{,}8\ m/s^2)\left(\frac{4\ 800}{4\ 801}\right)^2$

$g_M = 9{,}796\ m/s^2$

6. En el interior de un ascensor se coloca un péndulo simple cuyo período es de 4 s. Determinar:
   A) La longitud del péndulo.
   B) La frecuencia del movimiento cuando el ascensor está en marcha.

C) La frecuencia del movimiento cuando el ascensor arranca hacia arriba con una aceleración de 0,5 m / s^2.
D) La frecuencia del movimiento cuando el ascensor arranca hacia abajo con una aceleración de 0,6 m / s^2.

A) El período es igual a:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \;;\quad L = \frac{T^2\, g}{4\,\pi^2}$$

$$L = \frac{(4\ s)^2(9{,}8\frac{m}{s^2})}{4\,\pi^2} \;;\; L = 3{,}97\ m$$

B) Cuando está en marcha el ascensor, esté tiene velocidad contante y actúa bajo la acción de g.

$$f = \frac{1}{T} \;;\; f = \frac{1}{4s} \;;\; f = 0{,}25\ Hz$$

7. Cuando el ascensor está subiendo, aparece una fuerza de reacción dirigida hacia abajo y la aceleración que actúa sobre el péndulo es: g + 0,5 m/s^2 entonces la frecuencia es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g+0{,}5\ m/s^2}} \;;\quad T = 2\pi \sqrt{\frac{3{,}97\ m}{10{,}3\ m/s^2}}$$

T = 3,90 s

$$f = \frac{1}{T} \;;\; f = \frac{1}{3{,}90\ \ s} \;;\; f = 0{,}256\ Hz$$

Cuando el ascensor está bajando, aparece una fuerza de reacción dirigida hacia arriba y la aceleración que actúa sobre el péndulo es: g - 0,6 m/s^2 entonces la frecuencia es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g-0{,}6\ m/s^2}} \;;\quad T = 2\pi \sqrt{\frac{3{,}97\ m}{9{,}2\ m/s^2}}$$

T = 4,13 s

$$f = \frac{1}{T} \;;\; f = \frac{1}{4{,}13\ \ s} \;;\; f = 0{,}242\ Hz$$

7. Un disco sólido de 0,19 kg y 0,14 m de radio se tuerce con un ángulo de 1 rad y se suelta. La constante de torsión del alambre que soporta al disco es de 0,025 N.m/rad. Calcular:
A) La aceleración angular máxima
B) El período de oscilación.

A) El momento de inercia del disco es:

I = ½ m r^2 ; I = ½ (0, 19 kg) (0,14 m)^2

I = 1,86 x 10 $^{-3}$ kg m^2

La aceleración angular está dada por:

$$\zeta = -K\,\Theta \quad y \quad \zeta = I\,.\alpha$$

$$-K\,\Theta = I\,.\alpha$$

$$\frac{I}{-K} = \frac{\Theta}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{-k\,\Theta}{I} \;;\; \alpha = \frac{-\left(0{,}025\frac{Nm}{rad}\right)(1\ rad)}{1{,}86\ x\ 10^{-3}\ kg\ m^2} \;;$$

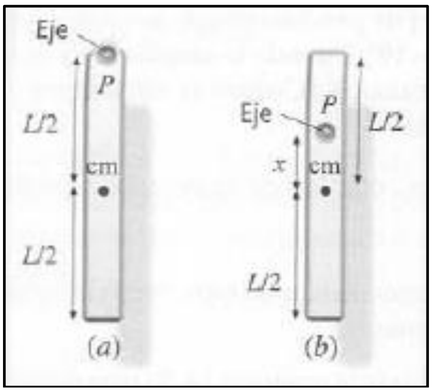
α = - 13,44 rad/s^2

B) El periodo está dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{\alpha}} \;;\; T = 2\pi \sqrt{\frac{1\ rad}{13{,}44\ rad/s^2}}$$

T = 1,71 s

8. Una barra uniforme de masa M y longitud L puede girar libremente alrededor de un eje horizontal perpendicular a la barra y que pasa por uno de sus extremos. Determinar:
A) El periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares.
B) El periodo de oscilación si el eje de rotación está a una distancia x del centro de masa.



A) El periodo en un péndulo físico esta dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

Además, el valor de la inercia de la barra esta dado por:

I = 1/3 ML^2; como d es la distancia al centro de masa de la barra se tiene: d = L/2

Al remplazar las ecuaciones en T se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{mg(\frac{1}{2}L)}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3\,g}}$$

B) Para determinar la inercia de la barra cuando el punto P esta fuera del centro de masa se debe considerar el teorema de los ejes paralelos.
Entonces se tiene que:
D = x,
$I = I_{CM} + MD^2$; $I = 1/12\ ML^2 + Mx^2$

Al sustituir las ecuaciones en T se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{1}{12}ML^{2+Mx)}}{Mgx}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(\frac{1}{12}L^{2+x)}}{gx}}$$

EJERCICIOS PARA LA TAREA

1. Calcular la longitud de un péndulo que tiene un período de 1, 456 s.

2. Calcular el valor de la aceleración de la gravedad en un lugar de la tierra donde un péndulo de 60 cm tiene un periodo de 1,8 s.

3. Un disco de 25 cm de diámetro se cuelga horizontalmente de un alambre atado en su centro. Se aplica una fuerza de 25 N en el borde del disco de tal modo que gira un ángulo de 14 ^{0}. El período del movimiento armónico angular es de 0,6 s. Calcular el momento de inercia del disco.

4. Un péndulo que tiene una longitud de 70 cm tiene un periodo de 1,8 s. Calcular el valor de la aceleración de la gravedad.

5. Determinar el valor de la longitud de la cuerda L de un péndulo que tiene un periodo igual a (1 / 3) T.

6. Un péndulo de longitud L es llevado a otro planeta donde el valor de la aceleración de la gravedad es tres veces el de la tierra. Calcular en cuánto hay que aumentar la longitud del péndulo para que mantenga el mismo período.

7. Un péndulo tiene un período de 2 s. Cuál sería el período si la longitud de la cuerda se la duplica.

8. Una esfera sólida de 3 kg de masa y 40 cm de diámetro está suspendida de un alambre. El momento de inercia rotacional para torcer el alambre es de 1,4 Nm para obtener un desplazamiento angular de 11 ^{0}. Calcular el período de oscilación angular.

9. Una barra de 90 cm de longitud oscila a modo de péndulo físico alrededor de un eje horizontal que pasa por un punto situado a 15 cm de su extremo superior. Determinar:
   A) El periodo de oscilación
   B) La longitud del péndulo simple equivalente.
   C) Otro punto de la barra que, tomado como centro de suspensión, oscilara alrededor de él con igual periodo.

10. Una barra delgada de 1 m de longitud tiene un extremo fijo y oscila alrededor de un eje horizontal a modo de péndulo físico. Determinar:
    A) El período.
    B) La longitud del péndulo simple equivalente
    C) El centro de percusión.