

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Las cosas que giran como un cilindro que rueda bajando un plano inclinado, un acróbata ejecutando un salto mortal, siguen girando hasta que algo los detiene. Un objeto que gira tiene una inercia de rotación y como ya se dijo anteriormente todos los objetos que se mueven tienen inercia de movimiento o cantidad de movimiento, en el caso de los objetos que giran se llama cantidad de movimiento angular.

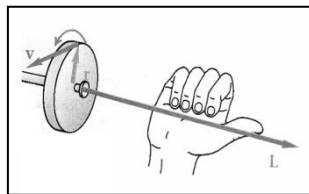
Los planetas en órbita en torno al Sol, una piedra que gira en el extremo de una cuerda y los diminutos electrones que giran en torno a los núcleos atómicos tienen cantidad de movimiento angular.

Se define la **cantidad de movimiento angular (L)** como el producto del momento lineal mv y el radio R del cuerpo que gira.

$$L = mv.R;$$

$$L = p.R$$

La cantidad de movimiento angular es una magnitud vectorial cuya dirección se define aplicando la regla de la mano derecha.



Con la definición de $\omega = v/r$ podemos expresar la magnitud del momento angular en términos de la velocidad angular:

$$L = m.R^2 \omega$$

También podemos remplazar $I = m R^2$ así:

$$L = I \omega$$

Podemos concluir diciendo que un objeto o sistema mantiene su cantidad de movimiento angular a menos que sobre ellos actúe un momento de torsión externo neto.

Ecuación: $L = I \omega$

Unidades SI: $L = [kg \cdot m^2 \cdot rad/s]$

$$L = [kg \cdot m^2 / s]$$

Dimensión: $L = [M \cdot L^2 \cdot T^{-1}]$

CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR.

Del mismo modo que la cantidad de movimiento lineal de cualquier sistema se conserva si no hay fuerza neta que actúe sobre él, la cantidad de movimiento angular establece:

Si ningún momento de torsión neto externo actúa sobre un sistema en rotación, la cantidad de movimiento angular de este sistema permanecerá constante.

Esto significa que, si no hay un momento de torsión externo, el producto de la inercia de rotación por la velocidad de rotación será igual en cualquier instante de tiempo.

Análíticamente podemos deducir la ecuación:

Sabemos que $\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t}$; $\zeta = I \cdot \alpha$

$$\zeta = I \cdot \frac{\omega_f - \omega_o}{t} ; \quad \zeta \cdot t = I \omega_f - I \omega_o$$

Impulso angular = Cambio en la cantidad de movimiento angular

Pero si no existe ningún momento de torsión externo al cuerpo que gira podemos afirmar que

$$\zeta = 0 .$$

$$0 = I \omega_f - I \omega_o$$

$$I \omega_o = I \omega_f$$

Cantidad de movimiento angular final = Cantidad de movimiento inicial



Esta afirmación nos permite explicar como un gato que cae de una rama elevada puede ejecutar un giro y caer parado.

También los seres humanos cuando se lanzan de un trampolín de una piscina, sin dificultad pueden ejecutar giros.

EJERCICIOS RESUELTOS

- Una barra uniforme delgada de 1 m de largo tiene una masa de 7 kg. Si la barra se apoya sobre su centro de masa y gira a una velocidad angular de 18 rad/s, calcular la cantidad de movimiento de la barra.

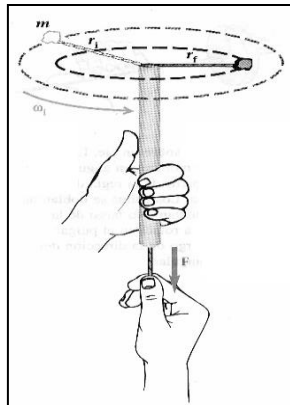
Sabemos que I de la barra es:

$$I = 1/12mL^2 ; I = 1/12(7\text{kg})(1\text{m})^2; I = 0,58 \text{ kg m}^2$$

La cantidad de movimiento angular de la barra esta dado por:

$$L = I \omega; L = (0,58 \text{ kgm}^2)(18 \text{ rad/s}); L = 10,44 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

- Una piedra atada a una cuerda se hace girar alrededor de un círculo horizontal. Si la piedra originalmente se mueve a una velocidad de 0,5 rad/s. Calcular la velocidad angular si el radio del círculo disminuye a la mitad.



Cuando se tira de la cuerda, la fuerza actúa a través del eje de rotación. De esta manera no se aplica un momento de torsión a la piedra y el momento inercia queda inalterado.

Podemos aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento angular:

$$I \omega_0 = I \omega_f$$

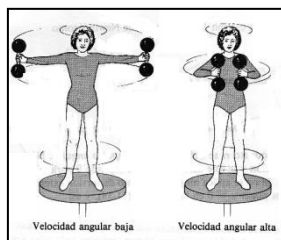
$$m R_o^2 \cdot \omega_0 = m R_f^2 \cdot \omega_f$$

$$\omega_f = \frac{R_o^2}{R_f^2} \omega_0 ; \omega_f = \left(\frac{R_o}{0,5 R_o} \right)^2 (0,5 \text{ rad/s})$$

$$\omega_f = 2 \text{ rad/s}$$

A menor radio aumenta la velocidad angular.

- Una mujer tiene un momento de inercia constante de 5 kg.m² y que sostiene una masa de 8 kg en cada mano. Cuando sostiene las masas a una distancia $r_o = 0,8$ m del eje de rotación, se le imprime una



velocidad angular inicial de $\omega_o = 3$ rad /s. Si acerca las masas hasta una distancia r_f de 0,3 m del centro de rotación. Calcular su nueva velocidad angular.

Si consideramos que las masas de 8kg son masas puntuales, el momento de inercia I_m de la mujer aumentará en cada caso mr^2 , donde $M = 16$ kg es la masa total y r es la distancia de las masas al eje de rotación. Por la conservación de la cantidad de movimiento que indica que la cantidad de movimiento inicial es igual a la cantidad de movimiento final, podemos escribir:

$$I \omega_0 = I \omega_f$$

$$(I_m + M R_o^2) \cdot \omega_0 = (I_m + M R_f^2) \cdot \omega_f$$

Remplazamos los datos y despejamos la velocidad angular final.

$$[5 \text{ kg.m}^2 + (16\text{kg})(0,8\text{m})^2](3\text{rad/s}) = [5 \text{ kg.m}^2 + (16\text{kg})(0,3\text{m})^2] \omega_f$$

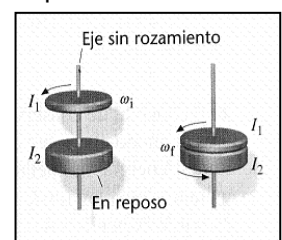
$$\omega_f = 7,10 \text{ rad/s}$$

La velocidad angular aumento al acercar las masas a su pecho.

EJERCICIOS TAREA

- Un patinador de hielo empieza su movimiento circular a una velocidad de 1,5 rev/s con los brazos extendidos. Luego encoge sus brazos para acercarlos al cuerpo, lo que produce una disminución de su momento de inercia a tres cuartas partes del valor inicial. Calcular la velocidad angular final del patinador.
- Un aeroplano de juguete se mueve en el extremo de una cuerda alrededor de un punto fijo en un círculo horizontal de 1 m de radio. Si la velocidad lineal es de 4,86 m/s. Calcular la velocidad si se tira de la cuerda para dar un radio de 0,750 m. Suponer que no hay momento de torsión.
- El cometa Halley se mueve alrededor del Sol en una órbita elíptica. Su aproximación más cercana al Sol es de 0,59 U.A. y su distancia más grande es de 35 U.A. (1 U.A. = la distancia de la Tierra al Sol). Si la rapidez del cometa cuando está más cerca del Sol es de 54 km/s. Calcular la rapidez del cometa cuando está más lejos del Sol. Despreciar cualquier cambio en la masa del cometa y suponer que el momento angular en torno al Sol se conserva.

- Un disco con momento de inercia I_1 está girando con velocidad angular inicial ω_1 alrededor de su eje de simetría sin rozamiento. Le cae encima otro disco con momento de inercia I_2 que está inicialmente en reposo en el mismo eje. Debido al rozamiento superficial, los dos discos finalmente adquieren una velocidad angular común ω_f . Calcular ω_f .



5. Un bloque de 2 kg se ata a un cordel que pasa sobre una polea a través de un agujero en una superficie horizontal sin rozamiento, Inicialmente el bloque gira a 6 rad/s a una distancia de 0,6 m del centro del agujero. Si el cordel es tirado desde abajo hasta reducir la distancia del bloque al centro a 0,2 m. Calcular la nueva velocidad angular.



APLICACIONES EN LA VIDA COTIDIANA

1. Ciclo de centrifugado de una lavadora.

En la última fase del lavado de la ropa en la lavadora, en el ciclo de enjuagado, el tambor gira rápidamente sobre sí mismo para extraer el agua de la ropa, es decir la ropa gira y las fuerzas moleculares son insuficientes para suministrar la fuerza radial necesaria para mantener las moléculas de agua en movimiento a lo largo de una trayectoria circular junto con la ropa. Por lo que las gotas agua, en virtud de su inercia, se desplazan en trayectorias rectilíneas hasta encontrar los costados del tambor giratorio.

2. Las centrífugas para separar los glóbulos del plasma sanguíneo de laboratorio comerciales con un ángulo de tubos fijo, giran a una velocidad de 3 400 rpm



3. El centro de masa del saltador de trampolín se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica después de abandonar la tabla. El momento angular está suministrado por el momento inicial externo ejercido por la fuerza de la tabla. Para que el saltador de más revoluciones en el aire encoge sus brazos y piernas para disminuir su momento de inercia e incrementar su velocidad angular.



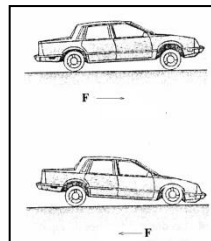
4. Una patinadora girando sobre sí misma cambia su velocidad angular al cambiar su momento de inercia acercando sus brazos al cuerpo.
5. Aunque el momento angular total del sistema Tierra-Luna se conserva, el momento angular es trasferido de la Tierra a la Luna. La energía total mecánica decrece como resultado de las perdidas friccionales de las mareas. Por consiguiente, la longitud del día se incrementa uniformemente a medida que la velocidad de rotación de la Tierra se hace menor y la longitud del mes decrece al acelerarse la Luna. A causa de este incremento de la velocidad, y en consecuencia de la energía, la distancia de la Luna a la Tierra también aumenta. Se a medido que la

longitud del día está aumentando gradualmente a una velocidad aproximada de 20 μ s por año(Así hace 200 millones de años, en el periodo jurásico, un día era aproximadamente de 23 horas.)La luna se mueve lentamente alejándose aproximadamente 3 cm por año.

6. Cuando una persona corre dobla las piernas para reducir la inercia rotacional, además las piernas cortas tienen menor inercia de rotación que las largas. Un animal con patas cortas tiene un paso más rápido que uno con patas largas.



7. Cuando un conductor pisa el acelerador, el camino ejerce una fuerza mayor sobre los neumáticos. Esta fuerza es paralela al camino y se dirige hacia el frente del automovil, esta fuerza suministra un momento de torsión que tiende a hacer que el auto gire en sentido contrario a las manecillas del reloj.El resultado de esta rotación es el levantamiento del frente del auto. Cuando el conductor pisa el freno, el camino ejerce una fuerza mayor sobre los neumáticos dirigida hacia la parte posterior del automovil. Esta fuerza origina un momento de torsión que causa una rotación en el sentido de las manecillas del reloj y en consecuencia el descenso del frente del automovil.



8. En el sistema de cambios de una bicicleta existe una relación entre el momento de torsión y la aceleración angular.

9. Ciertas máquinas como las cortadoras, limadoras, laminadoras, etc, no trabajan de manera continua. El trabajo resistente debido a la introducción del material que se requiere cortar, limar o laminar tiende a reducir la velocidad , la calidad, la vida de la máquina. Para minimizar estas variaciones, se adapta, sobre el eje del motor, un volante que es una rueda del momento de inercia elevado.

8. El danes Bohr en su teoría atómica, cuantificó el momento angular del electrón, en su movimiento alrededor del núcleo: esto es que el momento angular es igual a un número entero de una cierta cantidad constante.

9. Los norteamericanos Uhlenbeck y Goudsmith, supusieron que el electrón gira con respecto a un eje interno (como la rotación de la Tierra). Esta rotación interna, caracterizada por su momento angular, se denomina **spin**.

10. La fuerza que actua sobre un planeta es principalmente la fuerza de atracción del Sol, por lo que pasa siempre por el centro del Sol, es una fuerza central y el momento de fuerza corresponde

a este centro que es nulo. El momento angular es en consecuencia constante, tanto en magnitud como en dirección.

EXPLICA UTILIZANDO LO APRENDIDO

1. Explica la acción del ciclo de giro para exprimir ropa en una lavadora automática.

2. Explique las causas de que los pasajeros de la rueda de la figura se mueven hacia afuera cuando empieza a girar.



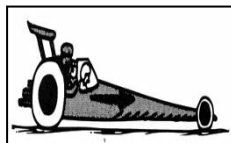
3. Se suele emplear centrifugas en las lecherías para separar la crema de la leche. ¿ Qué es lo que queda en el fondo?

4. Se puede hacer girar un cubo de agua en una trayectoria vertical de modo que el agua no se derrame. ¿ Por qué permanece el agua en el cubo aun cuando éste se encuentre por encima de la cabeza de la persona?

1. Imagina un lápiz y tres ejes de rotación a lo largo de la puntilla; en ángulo recto con el lápiz y a la mitad de éste; y perpendicular al lápiz y en uno de los extremos. Clasifica de menor a mayor la inercia de rotación del lápiz.

6. Karen y Leo van en bicicletas con la misma rapidez. Los neumáticos de la bicicleta de Leo tienen mayor diámetro que los de Karen. Señalar cuales ruedas tienen mayor rapidez de rotación.

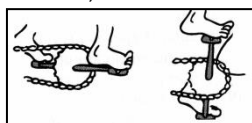
7. Las ruedas delanteras de un auto de arrancones, que estan al frente muy lejos del piloto, ayudan a evitar que el auto suba la nariz al acelerar. Explicar que conceptos físicos intervienen aquí.



1. En el barrio San Juan, por las fiestas de Quito, un joven que se inscribio en una competencia de coches de madera. Pregunta si debe usarse ruedas grandes y macizas o ligeras para rodar desde el reposo cuesta abajo.

9. Las bicicletas de carrera tienen neumáticos ligeros sobre armazones ligeros. Explicar por qué ?

10. Cuando pedaleas una bicicleta, el momento de torsión máximo se produce cuando los pedales están en posición horizontal y no se produce momento de torsión cuando están en posición vertical. Explicar por qué ?



11. Cuando una bola de bliche sale de la mano del jugador, no gira. Pero más adelante, a lolargo de la pista, si gira. ¿ Que produce la rotación ?

12. ¿ por qué los asientos centrales de un autobus son los más cómodos en viajes largos, cuando la carretera es irregular ?

13. Explicar por qué un helicoptero con un solo rotor principal posee un segundo rotor más pequeño montado en su eje horizontal en la parte trasera del aparato. Describir el movimiento resultante del helicoptero si este rotor trasero fallase durante el vuelo.

10. Dos esferas de igual masa se liberan del reposo en la cima de un plano inclinado. Una esfera es maciza y de densidad uniforme. La otra esfera es un armazón de densidad uniforme. Señalar que esfera llega primero al fondo del plano inclinado y cual tiene mayor energía cinetica de traslación.

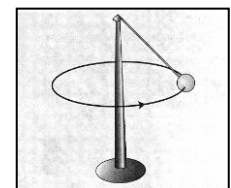
REFORZANDO LO APRENDIDO

1. Calcular la fuerza centrípeta sobre un automóvil de 2500 kg que toma una curva de 100 m de radio a una velocidad de 60 km/h.

2. La curva de una pista de carreras tiene un radio de 110 m y está inclinada a un ángulo de 65° ¿ Para qué velocidad se diseño esta curva ?

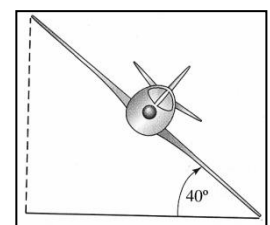
3. La pista de un velódromo está inclinada de modo que una bicicleta que corre a 63 km/h no se desliza hacia un lado cuando corre sobre la pista con un radio de curvatura de 77 m. ¿ Cual es el ángulo de inclinación ?

4. Se lanza una bola de 0,355 kg atada a un poste por una cuerda de 1,6 m de modo que con la cuerda forma un ángulo de 38° con el poste vertical, recorriendo un círculo de horizontal . Calcular:
a) La velocidad de la bola
b) La tensión de la cuerda.

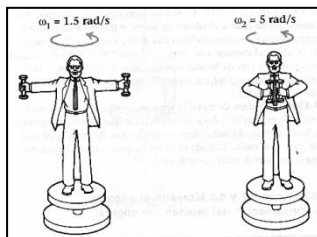


5. La cuerda de un péndulo cónico tiene 50 cm de longitud y la masa del cuerpo pendular es 0,30 kg. Calcular:
a) El ángulo que forma la cuerda y la horizontal cuando la tensión de la cuerda es seis veces mayor que el peso del cuerpo pendular.
b) El período del péndulo.

6. Un avión vuela en un círculo horizontal con una velocidad de 480 km/h. Para seguir esta trayectoria inclina las alas un ángulo de 40° . Sobre las alas se produce una fuerza ascensional que mantiene al avión en el aire. Calcular el radio de la trayectoria del avión.



7. Una rueda cuyo momento de inercia es de $32 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ se somete a un momento de torsión de $16 \text{ N}\cdot\text{m}$. Si la rueda está inicialmente moviéndose con una velocidad angular de 7 rad/s cuando se aplica el momento de torsión. Calcular la velocidad angular si el momento de torsión se aplicó por 10 s .
8. Un estudiante que sostiene una varilla por el centro la somete a un momento de torsión de $1,4 \text{ N}\cdot\text{m}$ alrededor de un eje perpendicular a la varilla, haciéndola girar a $1,3 \text{ rad}$ en $0,75 \text{ s}$. Cuando el estudiante sostiene la varilla en un extremo y le aplica el mismo momento de torsión. Calcular cuántos radianes gira la varilla en 1 s .
9. Se hace girar una linterna al extremo de una cuerda en un círculo horizontal de $0,80 \text{ m}$ de radio con una velocidad angular constante. Si no se aplica ningún momento de torsión. Calcular el cambio de radio si la velocidad angular de la linterna se reduce a la mitad.
10. Calcular el momento angular de la Tierra al girar alrededor de su eje, si se le considera a la Tierra una esfera de densidad uniforme de radio promedio $6,38 \times 10^6 \text{ m}$ y masa $5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$.
11. Calcular la energía cinética de un fonógrafo de $0,145 \text{ kg}$ y 12 pulg cuando gira a 45 rev/min .
12. Un profesor de física se ubica en una plataforma giratoria libremente. Mantiene una pesa en cada mano de sus brazos extendidos mientras un estudiante le da un impulso hasta que su velocidad angular llega a $1,5 \text{ rad/s}$. Cuando el profesor gira libremente e impulsa sus manos acercándolas al cuerpo, su velocidad angular se incrementa a 5 rad/s . Calcular la relación de su energía cinética final con su energía cinética inicial.



13. Una bola de boliche maciza con un radio de $10,9 \text{ cm}$ y una masa de $7,0 \text{ kg}$ rueda a lo largo de una línea de boliche a velocidad lineal de 2 m/s . Calcular su energía cinética de traslación, de rotación y la total.
14. Un disco que se libera desde la cima de un plano inclinado y rueda sin rozamiento, tiene una velocidad de $4,52 \text{ m/s}$ en el fondo. Calcular la altura del plano inclinado.
15. Calcular el momento de torsión desarrollado por un motor de 1200 kw de potencia de salida si su árbol de transmisión gira a 2000 rpm .
16. Un esmeril gira a 78 rpm . Se interrumpe la corriente eléctrica, las fuerzas de rozamiento hacen que se detenga en $3,5 \text{ s}$. Calcular la aceleración tangencial de un punto a 5 pulg del centro del esmeril.