LEYES DE NEWTON EN LA ROTACION

DINAMICA ROTACIONAL.

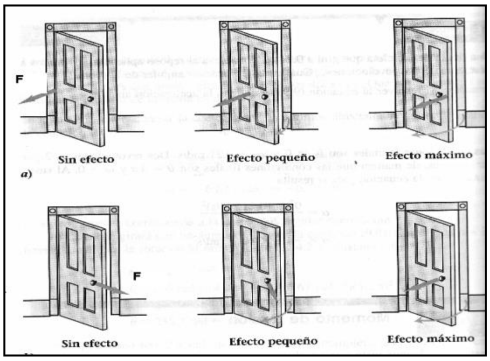
La dinámica rotacional se dedica al estudio del movimiento de los ***cuerpos rígidos*** que giran o rotan sobre un eje fijo, por la acción de fuerzas externas.

Se denomina **Cuerpo rígido** a cualquier objeto real con una forma definida que puede girar, sin deformarse, de modo que todas sus partes permanezcan a distancias constantes de un punto fijo llamado radio de giro.

Al analizar la dinámica de la rotación debemos encontrar la relación entre el torque y la rotación que produce.

MOMENTO DE TORSION O TORQUE

La magnitud que mide la efectividad de una fuerza para causar rotación se denomina ***momento de torsión o torque***. Cuando mayor es la distancia del eje de rotación (r = brazo de palanca) (bisagras de las puertas) al punto donde aplicamos la fuerza (F) (manubrio de la puerta), mayor será el torque (ζ).



Se lo define como el producto de la fuerza perpendicular aplicada a un objeto y el brazo de palanca:

$\zeta = F . r$ $\zeta = [N . m]$

Cuando la fuerza aplicada no es perpendicular se lo calcula con:

$\zeta = F . r . \text{sen}\, \Theta$

INERCIA ROTACIONAL O MOMENTO DE INERCIA

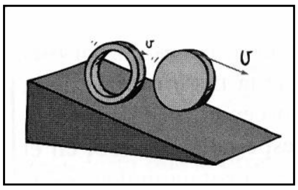
Así como un objeto en reposo tiende a permanecer en reposo, y un objeto en movimiento tiende a permanecer moviéndose en línea recta, un objeto que gira en torno a un eje tiende a permanecer girando alrededor de ese eje, a menos que interfiera alguna influencia externa.

Esta propiedad que tiene el objeto para resistir cambios en su estado de movimiento giratorio se llama ***inercia rotacional o momento de inercia.***
Es decir los cuerpos que giran tienden a permanecer girando, mientras que los que no giran tienden a permanecer sin girar. En ausencia de influencias externas, un trompo giratorio sigue girando.

La inercia rotacional de un objeto depende de su masa y de la distribución de la masa en relación con el eje de rotación.

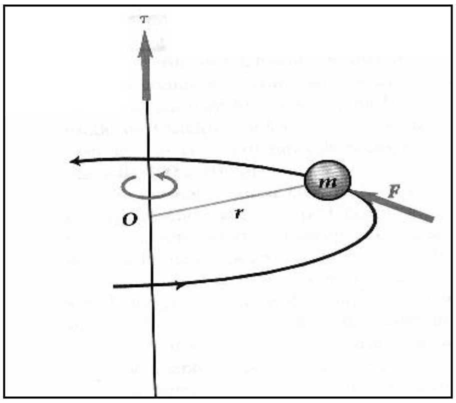
Es así que un grueso disco de piedra que gira bajo un torno de alfarero es muy masivo, ya que una vez que empieza a girar, tiende a permanecer girando, o cuando un equilibrista que camina por una cuerda, para ayudarse a conservar el equilibrio sostiene una pértiga larga, la que está alejando de su eje de rotación.

Un cilindro macizo rueda con más rapidez al bajar un plano inclinado que un anillo, aunque las masas sean iguales o distintas, o los diámetros externos sean iguales o distintos. Un anillo tiene más inercia rotacional en relación con su masa que un cilindro.



Cuando tenemos una masa (m) forzada a moverse alrededor de un punto fijo O a una distancia R está sujeta a una fuerza F.

El **momento de torsión** resultante ζ cambia la velocidad angular de la masa.



La aceleración tangencial que mueve la masa m se determina a partir de la 2da ley de Newton:

$F = m . a_t$; pero $a_t = R. \alpha$ al remplazar tenemos:

$F = m. R\, \alpha$; también se conoce que $\zeta = F. R$ entonces:

$\zeta = m. R^2. \alpha$
ζ es el torque de la fuerza respecto al eje considerado
R la distancia perpendicular de la partícula al eje.

La inercia rotacional de un cuerpo es una **magnitud escalar** y está dado por:

$I = m.R^2$ entonces: **$\zeta = I.\ \alpha$**

Cuando se tiene un sistema de n partículas, la inercia rotacional esta dado por:

$I = m_1.r_1{}^2 + m_2.r_2{}^2 + \ldots\ldots.\ m_n.r_n{}^2 = \Sigma\ m_i.r_i{}^2$

Ecuación: $I = m.r^2$

Unidades: SI $I = [\ kg.m^2\ ]$

cgs $I = [\ g.\ cm^2\ ]$

Dimensiones: $[\ I\ ] = [M.L^{\ 2}]$

La inercia rotacional varía de acuerdo a la forma y el eje del radio de giro de los cuerpos, así podemos representar a los siguientes:

$I = m.R^2$

$I = mR^2$

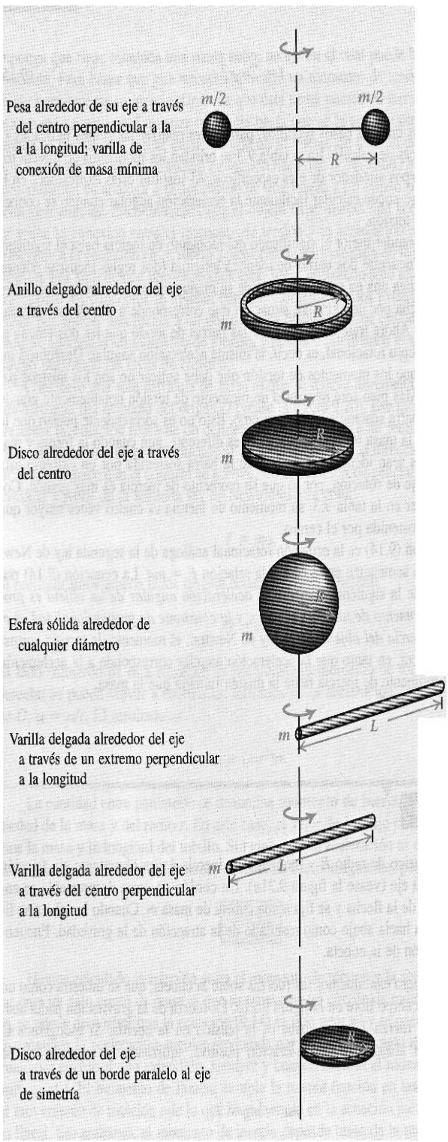
$I = ½\ mR^2$

$I = 2/5mR^2$

$I = 1/3\ mL^2$

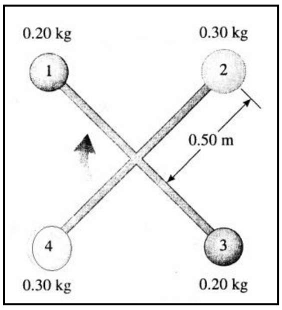
$I = 1/12mL^2$

$I = 3/2\ mR^2$



EJERCICOS RESUELTOS

1. Un payaso en un espectáculo que realiza en un circo, hace girar un bastón en forma de cruz, compuesto de cuatro masas fijas a los extremos de dos varillas ligeras. Cada varilla tiene 1 m de largo. Calcular la inercia rotacional del sistema en torno a un eje perpendicular cuando el payaso lo hace girar por el punto donde las varillas se cruzan.



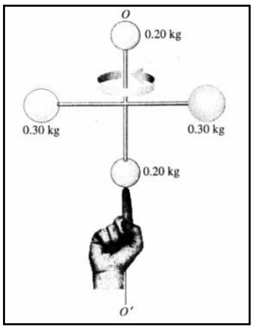
La inercia calculamos con:

$I = \Sigma\ m_i.r_i{}^2$
$I = m_1.r_1{}^2 + m_2.r_2{}^2 + m_3.r_3{}^2 + m_4.r_4{}^2$

$I = (\ 0{,}20\ kg)(0{,}50\ m)^2 + (\ 0{,}30\ kg)(0{,}50\ m)^2 + (\ 0{,}20\ kg)(0{,}50\ m)^2 + (\ 0{,}30\ kg)(0{,}50\ m)^2$

$I = 0{,}25\ kg.m^2$

2. El mismo payaso ahora hace girar el bastón en torno a 00´ . Calcular, el momento de inercia en torno a este eje.



La inercia calculamos con:

$I = \Sigma\ m_i.r_i{}^2$
$I = m_1.r_1{}^2 + m_2.r_2{}^2 + m_3.r_3{}^2 + m_4.r_4{}^2$
$I = (\ 0{,}20\ kg)(0\ m)^2 + (\ 0{,}30\ kg)(0{,}50\ m)^2 + (\ 0{,}20\ kg)(0\ m)^2 + (\ 0{,}30\ kg)(0{,}50\ m)^2$

$I = 0{,}15\ kg.m^2$

3. Un zapatero está haciendo girar la piedra de esmeril de masa 1,3kg y radio 16 cm, está rotando con una velocidad angular de 340 rev /min, cuando el motor se apaga. Calcular la fuerza tangente a la rueda que debe aplicar el zapatero, para que se detenga después de 18 rev.

Se sabe que: $r = 0{,}16\ m$; $\omega_f = 0\ rad/s$
$\omega = 340\ rev/min = 35{,}6\ rad/s$
$\Delta\Theta = 18\ rev = 113{,}1\ rad$

Aplicamos la ecuación:

$\cancel{\omega_f{}^2} = \omega_o{}^2 + 2\ \alpha\ \Delta\Theta$;

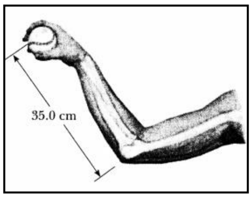
$\alpha = \dfrac{-\omega_o{}^2}{2\Delta\Theta}$; $\alpha = \dfrac{(35{,}6\ rad/s)^2}{2(113{,}1\ rad)}$,

$\alpha = -\ 5{,}60\ rad/s^2$

La inercia de la piedra de esmeril está dado por : $I = \frac{1}{2} m . R^2$ y como $\zeta = I . \alpha$ se tiene

$F.\cancel{r} = \frac{1}{2} m\, r^{\cancel{2}}\, \alpha$;
$F = \frac{1}{2} m\, r\, \alpha$
$F = \frac{1}{2}$ (1,3 kg)(0,16 m)(- 5,60 rad/s^2)
F = - 0,58 N

4. Un jugador de béisbol que afloja el brazo antes de un juego lanza una pelota de 0,15 kg empleando sólo la rotación de su antebrazo para acelerar la pelota. La pelota parte del reposo y es lanzada con una rapidez de 30 m/s en 0,3 s. Calcular:



a) La aceleración angular constante del brazo y la pelota.
b) La inercia rotacional de la pelota
c) El momento de torsión que se le aplica a la pelota.

a) Ya que ω_o = 0 rad/s y $\omega_f = \omega_o + \alpha\, t$
r = 0,35m

La aceleración angular está dada por: $\alpha = \frac{\omega}{t}$
También se conoce que : $v = r . \omega$

$$\alpha = \frac{v}{r\,t} \;;\; \alpha = \frac{30\ \mathrm{m/s}}{(0{,}35\ \mathrm{m})(0{,}3\ \mathrm{s})} \;;\; \alpha = 286\ \mathrm{rad/s^2}$$

b) La inercia de la pelota en torno a un eje que pasa por el codo y es perpendicular al brazo es:

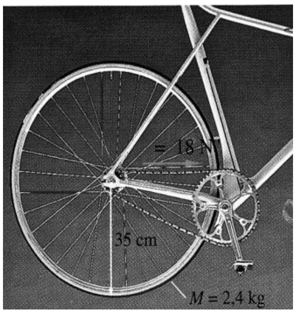
$I = m.r^2$; I=(0,15 kg)(0,35 m)^2 ; I= 0,0184 kg.m^2

c) El momento de torsión es:

$\zeta = I . \alpha$; ζ = (0,0184 kg.m^2)(286 rad/s^2)

ζ = 5,26 N.m

5. En una bicicleta estática para realizar ejercicios sin desplazarse, la cadena aplica al piñón una fuerza de 18 N a una distancia de r_p = 0,07 m del eje de la rueda. La inercia rotacional de la rueda esta dado por $I = m.r^2$ de radio 0,35 m y masa 2,4 kg. Calcular la velocidad lineal al cabo de 5 s.



Sabemos que ω_o = 0 rad/s y $\omega_f = \omega_o + \alpha\, t$
$\omega_f = \alpha\, t$; $I = m\, r^2$
$\zeta = I . \alpha$ y $\zeta = F . r_p$
Igualamos las dos ecuaciones y remplazamos I:
$I . \alpha = F . r_p$; $m\, r^2\, \alpha = F . r_p$
Despejamos α :

$$\alpha = \frac{F . r_p}{m\, r^2} \;;\; \alpha = \frac{(18\ \mathrm{N})\,(0{,}07\ \mathrm{m})}{(2{,}4\ \mathrm{kg})(0{,}35\ \mathrm{m})^2} \;;$$

α = 4,29 rad/s^2

$\omega_f = \alpha\, t$; ω_f = (4,29 rad/s^2) (. 5s)

ω_f = 21,43 rad/s

La velocidad lineal esta dado por:

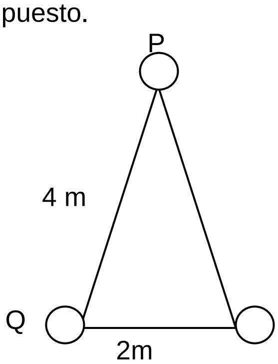
$v = r . \omega_f$; v = (0,35 m) (21,43 rad/s)

v = 7,50 m/s

EJERCICIOS TAREA

1. Una rueda cuyo momento de inercia es de 32 kg . m^2 se somete a un momento de torsión de 12 N.m. Si la rueda esta inicialmente moviéndose con una velocidad angular de 6 rad/s cuando se aplica el momento de torsión. Calcular la velocidad angular final si el momento de torsión se aplicó durante 9 s.

2. Tres masas iguales m = 0,4 kg, se fijan a los vértices de un triángulo isósceles PQR. Calcular el momento de inercia del sistema respecto a:
a) Un eje que pasa por el lado del triángulo más pequeño.
b) Un eje que contenga a la altura que va del vértice Q a su lado opuesto.



3. Una pelota de tenis posee una masa de 57 g y un diámetro de 7 cm. Calcular el momento de inercia alrededor de su diámetro. La pelota de tenis es una esfera hueca de paredes delgadas cuya $I = 2/3\, m\, r^2$

4. Se aplica un momento de torsión de 12 N.m a una rueda pesada cuyo momento de inercia es I = 36 kg .m^2 . Calcular:
a) La aceleración angular de la rueda.
b) Si la rueda esta inicialmente en reposo y el momento de torsión se aplicó por 10s, determinar la velocidad angular de la rueda al final de los 10s.

5. Un disco de hierro tiene un radio de 0,515 m y una masa de 307 kg. El disco está montado sobre su eje de modo que está libre para girar.

Calcular:

a) El momento de torsión que se requiere para darle una aceleración angular de 1 rad/s^2.
b) Si el momento de torsión se aplica en el borde del disco, cual es la fuerza requerida.
c) La fuerza requerida si es aplicada a una distancia de 10,5 cm del eje.

6. Una piedra de afilar los cuchillos en forma de disco tiene una masa de 1,7 kg y un radio de 8cm y está girando a 730 rev/min. Cuando se desconecta el motor, una mujer continúa afilando su cuchillo manteniéndola contra el disco de afilar durante 9 s hasta que ésta se detiene. Calcular:
a) Hallar la aceleración angular del disco.
b) El momento de torsión que ejerce el cuchillo sobre el disco.
Suponer constante la aceleración y que no existe otros momentos de fuerza de rozamiento.

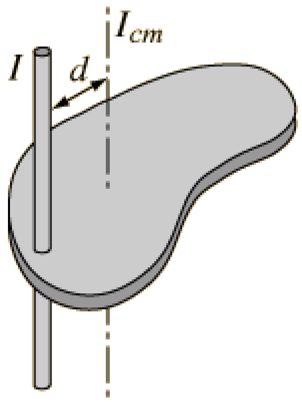
7. El volante de un motor tiene un momento de inercia de 36 kg. m^2 . Calcular el momento de torsión necesario para acelerarlo desde el reposo hasta una velocidad angular de 400 rpm en 10 s.

8. Calcular el momento de inercia de una varilla de delgada de 1 kg de 1m de longitud que gira alrededor de uno de sus extremos y cuando el eje está a través de su centro.

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS O TEOREMA DE STEINER

El momento de inercia de cualquier objeto sobre un eje a través de su centro de masa es el momento de inercia mínimo sobre un eje en esa dirección del espacio. El momento de inercia sobre un eje paralelo a ese eje que pasa por el centro de masa está dado por:

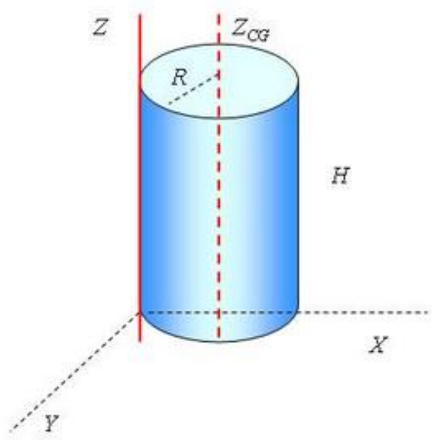
I eje paralelo= I cm + md^2



La expresión añadida al momento de inercia sobre el centro de masa se reconoce como el momento de inercia de una masa puntual. El momento de inercia en torno a un eje paralelo es la suma del momento de inercia del objeto sobre su centro de masa, más el momento de inercia de todo el objeto -tratado como una masa puntual en el centro de masa- sobre ese eje paralelo.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular el momento de inercia de un cilindro macizo homogéneo de radio R, altura H y masa m respecto al eje Z de la figura.



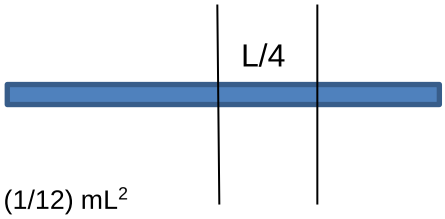
Aplicando el teorema de los ejes paralelos se tiene:

I ep = I cm + md^2

I ep = mR^2 / 2 + mR^2

I ep = 3 m R^2 / 2

2. Calcula el momento de inercia de una varilla, masa m, longitud L, respecto a un eje perpendicular a distancia L/4 de un extremo.

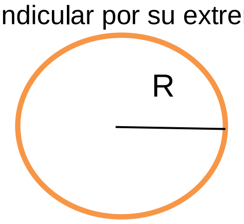


$I_0 = (1/12)\ mL^2$

I= 1/12mL^2 + m(L/4)^2

I = 7mL^2/48

3. Calcula el momento de inercia de un disco homogéneo, masa m, radio R, girando respecto a un eje perpendicular por su extremo.



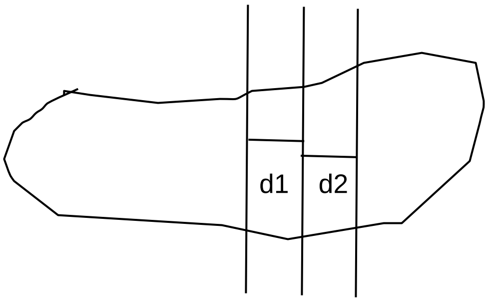
$I_0 = (1/2)\ mR^2$

Por lo tanto:

$I = (1/2)\ mR^2 + mR^2 = (3/2)\ mR^2$

4. El momento de inercia de un cuerpo de masa 2 kg respecto a un eje que pasa a 0,5 m del c.d.m vale 0,4 kg·m^2. Calcula el momento de inercia respecto a un eje paralelo situado 0,3 m más lejos del c.d.m. Se sabe que:

$m = 2$ kg; $d_1 = 0{,}5$ m; $I_1 = 0{,}4$ kg·m^2; $d_2 = 0{,}3$ m



El teorema de Steiner no se puede aplicar entre dos ejes paralelos cualesquiera, uno de ellos tiene que pasar por el c.d.m del cuerpo, luego en este problema se debe utilizar dicho teorema para cada una de las dos distancias.

$I_1 = I_o + md1^2$
$I_2 = I_o + m(d1 + d2)^2$

Entonces:

$I_0 = I_1 - md1^2$
$I_0 = I_2 - m(d1 + d2)^2$

Se tiene:

$I_1 - md1^2 = I_2 - m(d1 + d2)^2$

$I_2 = I_1 - md1^2 + m(d1 + d2)^2$

$I_2 = 0{,}4\ kgm^2 – 2kg\ 0{,}5^2\ m^2 + 2kg(0{,}5 + 0{,}3)^2 m^2$

$I_2 = 1{,}18\ kgm^2$