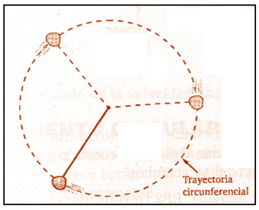
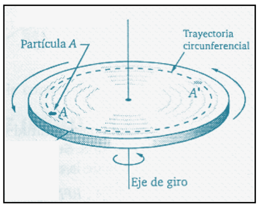
DINAMICA ROTACIONAL

MOVIMIENTO CIRCULAR

Es el movimiento cuya trayectoria es una circunferencia. Cuando un objeto gira alrededor de un eje su trayectoria forma una circunferencia o parte de ella. De igual manera se da este tipo de trayectoria cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje.
Se considera movimiento circular a:



1. Una piedra, sostenida por una cuerda girando en un plano vertical, como la rueda moscovita.



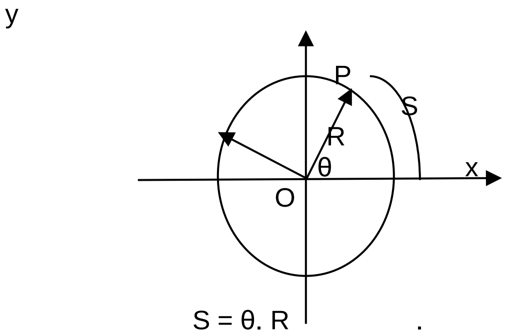
2. Una partícula A gira alrededor del eje de giro como el carrusel.

ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO CIRCULAR.

1. Radio vector (R).

   Es un vector que tiene su origen en el centro de giro y su extremo final en la posición donde se encuentra el objeto moviéndose en forma circular.
   El módulo del radio vector nos indica la longitud de este, que constituye el radio de la circunferencia que se forma cuando el objeto describe el movimiento circular.

2. Longitud de arco (S)
   Constituye la longitud de arco recorrida por un objeto en determinado tiempo. esta dado por:



$S = \theta . R$
θ : ángulo (rad)
R : radio (m)
S : longitud del arco

3. Posición angular. (θ)

   Es el ángulo que se forma entre el eje de referencia x y el vector posición (P)de un objeto.

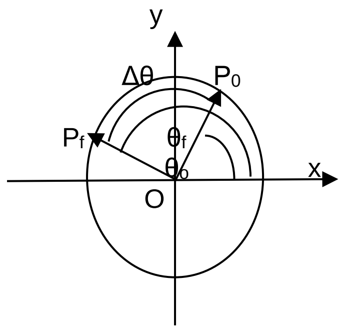
   En el movimiento circular el ángulo θ tiene como unidades de acuerdo al SI al radian (rad), razón por la cual debemos recordar la equivalencia:

   $$180^{o} = \pi \text{ rad}$$

   Dimensionalmente: $\theta = [\ 1\ ]$

4. Desplazamiento angular (Δθ)

   Es la variación de posición angular que un objeto puede experimentar durante el movimiento. Generalmente el desplazamiento angular se lo realiza en sentido anti horario..



La ecuación es : $\Delta\theta = \theta_f - \theta_0$

Las unidades: $\Delta\theta = [\text{ rad }]$

La dimensión: $\Delta\theta = [\ 1\ ]$

5. Velocidad angular. (ω_m)

   Es la razón que se da entre el desplazamiento angular descrito por el cuerpo al girar y el tiempo empleado para efectuarlo.

   $$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad ; \quad \omega_m = \frac{\theta_f - \theta_o}{t_f - t_o}$$

   Las unidades en el sistema internacional son:
   $$\omega_m = \frac{rad}{s}$$
   Dimensionalmente está dado por:

   $$\omega_m = [\ 1 / T\ ] = [\ T^{-1}\ ]$$

   Generalmente la velocidad angular también esta expresada en :

   Revoluciones Por Minuto:

r.p.m = R.P.M = $\frac{rev}{min}$

Revoluciones Por Segundo

r.p.s = R.P.S = $\frac{rev}{s}$

La equivalencia es:

1 rev = 1 vuelta = 2πrad = 360º

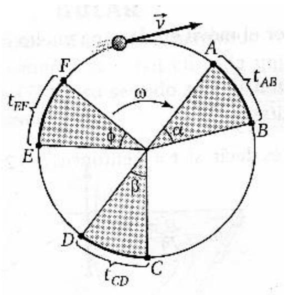
A la velocidad también se la conoce como: ¨Frecuencia Angular ¨

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U.)

Es el movimiento circular en el cual un cuerpo recorre desplazamientos angulares iguales en intervalos de tiempos iguales, es decir se mueve con una velocidad angular ω constante.

CARACTERISTICAS DEL M.C.U.

1. En tiempos iguales recorren longitudes de arcos iguales y se barren ángulos centrales iguales.



Si: $t_{AB} = t_{CD} = t_{EF}$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \phi$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF}$

$\omega = \frac{\Delta\theta}{t}$; ω = cte.

2. El desplazamiento angular está dado por:

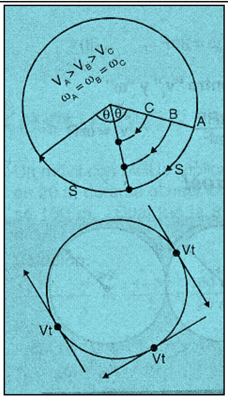
   $\Delta\theta = \omega \cdot t$; $\Delta\theta = \theta_f - \theta_o$

   La posición angular final es:

   $\theta_f - \theta_o = \omega \cdot t$

   $\theta_f = \theta_o + \omega \cdot t$

3. Velocidad Tangencial o Lineal. (v)
   Es el arco recorrido en la unidad de tiempo, se representa por un vector que es tangente a la circunferencia en el punto donde se encuentra el cuerpo girando.



$v = \frac{S}{t}$; $S = \theta.R$

$v = \frac{\theta.R}{t}$; $\boldsymbol{v = \omega.R}$

Las unidades son: $v = \frac{m}{s}$; $\frac{km}{h}$

Dimensionalmente: $v = [L / T] = [L.T^{-1}]$

4. Periodo. (T)

   Es el tiempo empleado por el objeto en dar una vuelta completa.

   $T = \frac{\text{tiempo total}}{\text{Nº de vueltas}}$

   Si el cuerpo recorre una circunferencia completa, el t = T se tiene: $\Delta\theta = 2\pi$ rad por tanto:

   $\omega = \frac{\Delta\theta}{t}$; $t = \frac{\Delta\theta}{\omega}$

   $T = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega}$; $\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{T}}$

   -

   $v = \omega.R$; $\boldsymbol{v = \frac{2\pi R}{T}}$

   Las unidades del periodo son : T = s

   La dimensión es: T = [T]

5. Frecuencia. (f)

   Es el número de vueltas o revoluciones que da el cuerpo en la unidad de tiempo.

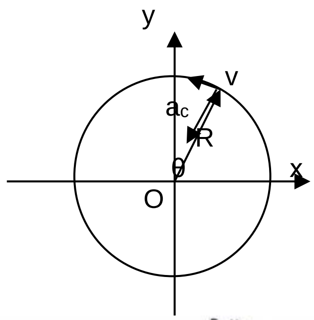
   $f = \frac{\text{Nº de vueltas}}{\text{tiempo total}}$

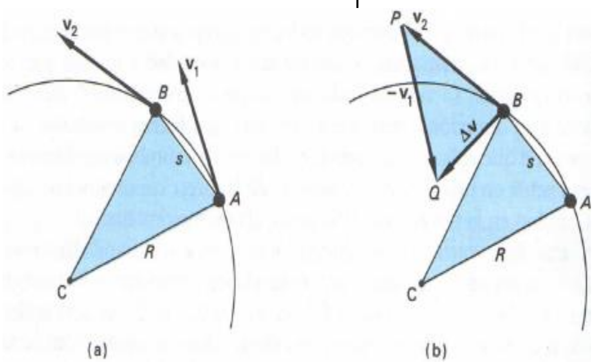
   $f = \frac{1}{T}$, $f = \frac{\omega}{2\pi \text{ rad}}$; $\omega = 2\pi f$

   La unidad es: $f = 1/s = s^{-1}$ = hertz (hz)

6. Aceleración centrípeta (a_c)

   En el M.C.U. la aceleración en la dirección tangencial de la velocidad no existe, razón por la cual para que el cuerpo siga en movimiento aparece la aceleración centrípeta, que tiene la dirección del radio y está dirigida hacia el centro.





$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_2}{\Delta t}$$

Por semejanza de triángulos se puede afirmar que:

$$\Delta AOB \sim \Delta BPQ$$

$$\frac{AO}{BP} = \frac{OB}{PQ} = \frac{AB}{BQ}$$

$$\frac{R}{V} = \frac{OB}{V} = \frac{S}{\Delta V}$$

$\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{s}{R}$ se sabe que $s = V.\Delta t$

$\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{V.\Delta t}{R}$ entonces $\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{V^2}{R}$

Por lo tanto:

$$\mathbf{a_c = \frac{v^2}{R}}\ ;$$

Como: $V = \omega.R$ entonces:

$a_c = \dfrac{(\omega . R)^2}{R}$ entonces se tiene:

$$\mathbf{a_c = \omega^2 .R}$$

Además, se deduce que:

$\mathbf{a_c = \omega.v}$, $\mathbf{a_c = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}}$

Se deja la deducción como actividad del estudiante.

La dirección de la aceleración centrípeta es perpendicular a la velocidad del movimiento. y opuesta a la del radio.

$$u_{ac} = - u_r$$

Las unidades son: $a_c = m/s^2$

Las dimensiones son: $a_c = [L. T^2]$

7. Para relacionar los parámetros lineales con los angulares se utiliza las siguientes ecuaciones:

Para la distancia: $d = R. \Delta\theta$

Para la rapidez : $v = R. \omega$

EJERCICIOS RESUELTOS.

1. Reducir 4,5 rev a grados y radianes.

$4{,}5\ \cancel{rev} \left| \dfrac{2\pi\ rad}{1\ \cancel{rev}} \right| = 28{,}27$ rad.

$28{,}27\ \cancel{rad} \left| \dfrac{180^o}{\pi\ \cancel{rad}} \right| = 1\ 619{,}75^o$

2. Transformar 300 rpm a rad /s

$300\ rpm = \dfrac{300\ \cancel{rev}}{\cancel{min}} \left| \dfrac{2\pi\ rad}{1\ \cancel{rev}} \right| \dfrac{1\ \cancel{min}}{60s} \right| = 31{,}42\ \dfrac{rad}{s}$

3. Transformar 6 vueltas a rad y grados

$6\ \cancel{vueltas} \left| \dfrac{2\pi\ rad}{1\ \cancel{vuelta}} \right| = 37{,}70^0$

$6\ \cancel{vueltas} \left| \dfrac{360^o}{1\ \cancel{vuelta}} \right| = 2\ 160^0$

4. Transformar 10 rps a rad /s

$10\ rps = \dfrac{10\ \cancel{rev}}{s} \left| \dfrac{2\pi\ rad}{1\cancel{rev}} \right| = 62{,}83\ \dfrac{rad}{s}$

5. Transformar 16,6 rad /s a rpm

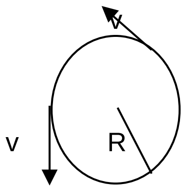
$\dfrac{16{,}6\ \cancel{rad}}{\cancel{s}} \left| \dfrac{1\ rev}{2\pi\ rad} \right| \dfrac{60\ \cancel{s}}{min} \right| = 158{,}51$ rpm

6. Transformar 100º a rad

$\dfrac{100\cancel{^o}}{} \left| \dfrac{\pi\ \ rad}{180\cancel{^o}} \right| = 1{,}75$ rad

7. Un disco gira a razón de 45 rpm. si el radio es de 20 cm. Calcular la rapidez tangencial de los puntos de la periferia.

   Se sabe que:

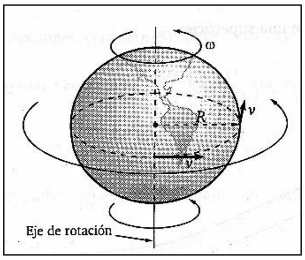
   ω = 45 rpm = 4,71 rad/s

   R = 20 cm = 0,20m

   Como es un M.C.U tenemos:

   $v = \omega.R$, v = 4,71 rad/s . 0,20 m ; v = 0,94 m/s

8. Calcular la rapidez tangencial de un punto del Ecuador de la Tierra. El radio terrestre es de 6 370 km.



Se sabe que:

R = 6 370 km

$\omega = \frac{1\ \cancel{vuelta}}{\cancel{día}} \left| \frac{2\pi\ rad}{1\ \cancel{vuelta}} \right| \frac{1\ \cancel{día}}{24\ h} \right| = 0{,}26\ rad/h$

$\omega = 7{,}22 \times 10^{-5}$ rad/s (velocidad angular de la Tierra)

Para encontrar la rapidez tangencial utilizamos:

$v = \omega.R$; v = 0,26 rad/h .6 370 km ;v=1656,20 km/h

v = 460,06 m/s

9. Un disco CD-ROM gira a 3000 rpm. Cuál es la velocidad angular en rad/s.

   ω = 3 000 rpm

   $\frac{3\,000\ rev}{min} \left| \frac{2\ \pi\ rad}{1\ rev} \right| \frac{1\ min}{60s} \right|$ = 314,16 rad/s

   ω = 314,16 rad /s

10. Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor del centro de la Tierra y cerca de la superficie de la Tierra. Si su aceleración centrípeta es 9,8 m/s^2. Calcular:
    a) La velocidad lineal o tangencial.
    b) El tiempo en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra.
    c) La velocidad angular del satélite

    Sabemos que :

    R = 6370 km = 6 370 000 m
    $a_c = g$ = 9,8 m/s^2

    a) De la ecuación de la a_c despejamos v

    $a_c = \frac{v^2}{R}$; $v = \sqrt{a_c .R}$; $v = \sqrt{g .R}$

    $v = \sqrt{9{,}8\ m/s^2 .\ 6\,370\,000\ m}$

    v = 7 901,01 m/s

    b) $T = \frac{2\ \pi\ R}{v}$; $T = \frac{2\ \pi\ (6\,370\,000\ \cancel{m})}{7\,901{,}01\ \cancel{m}/s}$

    T = 5 065 , 67 s; T = 84,43 min.

    c) $\omega = \frac{2\ \pi\ rad}{T}$; $\omega = \frac{2\ \pi\ rad}{5\,065{,}67\ s}$;

    $\omega = 1{,}24 \times 10^{-03}$ rad /s

11. En una feria, la rueda moscovita de 15 m de radio da 3 vueltas por minuto. Si un niño se encuentra en la canastilla, determinar:
    a) La frecuencia del movimiento
    b) El periodo del movimiento.
    c) La velocidad angular del niño.
    d) Velocidad lineal del niño
    e) Aceleración centrípeta del niño.
    f) La distancia recorrida en 4s

    Se sabe que:
    R = 15m
    n = 3 vueltas
    t = 1 min = 60 s

    a) La frecuencia está dada por:

    $f = \frac{n}{t}$; $f = \frac{3\ v}{60s}$, $f = 0{,}05\ s^{-1}$

    b) El período es:

    $T = \frac{t}{n}$; $T = \frac{60\ s}{3\ v}$; T = 20 s

    c) La velocidad angular del niño es:

    $\omega = \frac{2\pi\ rad}{T}$; $\omega = \frac{2\ \pi\ rad}{20s}$; ω = 0,31 rad/s

    d) La velocidad del niños es:

    $v = \frac{2\ \pi\ R}{T}$; $v = \frac{2\ \pi\ 15m}{20s}$; v = 4,71 m/s

    e) La aceleración centrípeta del niños es:

    $a_c = \frac{v^2}{R}$; $a_c = \frac{(4{,}71\ m/s)^2}{15\ m}$; a_c = 1,48 m/s^2

    f) Para determinar la distancia necesitamos encontrar el desplazamiento angular:

    $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$; $\Delta\theta = \omega\ .\ \Delta t$

    $\Delta\theta$ = 0,31 rad/s . 4s ; $\Delta\theta$ = 1,24 rad.

    $d = \Delta\theta\ .R$; d =1,24rad.15m ; d = 18,60 m

EJERCICIOS TAREA

1. Reducir 18 rev a grados y radianes.
2. Transformar 462 rpm a rad /s
3. Transformar 15 vueltas a rad y grados
4. Transformar 80 rps a rad /s
5. Transformar 23,8 rad /s a rpm
6. Transformar 235º a rad
7. Un ciclista en una pista circular de 160 m de radio da 10 vueltas cada 4 minutos. Determinar:
   a) La frecuencia del movimiento
   b) El periodo del movimiento.
   c) La velocidad angular del ciclista.
   d) Velocidad lineal del ciclista
   e) Aceleración centrípeta del ciclista.
8. La distancia recorrida en 10s
9. Reducir 22 rev a grados y radianes.
10. Transformar 238 rad a grados
11. Transformar 120 rpm a rad /s
12. Transformar 6 vueltas a rad y grados
13. Transformar 200 rps a rad /s
14. Transformar 324,8 rad /s a rpm
15. Transformar 689 235º a rad y rev
16. Un motociclista tiene una trayectoria circular de 170 m de radio con una velocidad de 120 km/h.
    Calcular:
    a) La aceleración centrípeta.
    b) La velocidad angular
    c) El período del movimiento.

17. La hélice de un avión da 3 260 vueltas en 30 min. Determinar:
    a) El período.
    b) La frecuencia.
    c) La velocidad angular.
    d) La velocidad tangencial
    e) La aceleración centrípeta.

18. Calcular el período, la frecuencia y la velocidad angular de cada una de las manecillas del reloj

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO (MCUV)

Es el movimiento circular en el cual un cuerpo varia constantemente su velocidad angular en un tiempo determinado.

CARACTERISTICAS DEL M.C.U.V.

1. Aceleración Angular:

   Esta variación de la velocidad angular en función del tiempo recibe el nombre de aceleración angular y es constante.

   $$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = cte$$

   $$\Delta\omega = \alpha \cdot \Delta t$$

   $$\omega_f - \omega_o = \alpha \cdot \Delta t$$

   $$\omega_f = \omega_o + \alpha \cdot \Delta t$$

2. La deducción de las ecuaciones del M.C.U.V es similar a las del M.R.U.V. y tenemos:

   $$\omega_f = \omega_o + \alpha \cdot \Delta t$$

   $$\Delta\theta = \omega_o t + ½ \alpha t^2$$

   $$\omega_m = \frac{\omega_o + \omega_f}{2}$$

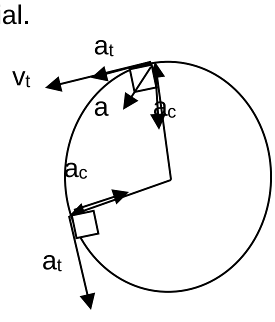
   $$\Delta\theta = \omega_m t$$

   $$\omega_f^{\ 2} = \omega_o^{\ 2} + 2 \alpha \Delta \theta$$

3. En el M.C.U.V el vector velocidad varía continuamente en módulo, dirección y sentido, lo que produce que la aceleración tenga componente tangencial y centrípeta perpendiculares entre ellas.

4. Aceleración tangencial (a_t)

   Es una magnitud vectorial cuyo módulo mide el cambio de valor que experimenta la velocidad tangencial en la unidad de tiempo. es un vector tangente a la trayectoria y su sentido es el mismo que la velocidad tangencial.



Se determina que:

$a_{T}=\frac{\Delta V}{t}$ entonces: $a_{T}=\frac{V_f - V_o}{t}$

$a_{T}=\frac{\omega_f.R - \omega_o.R}{t}$; $a_{T}=\frac{\omega_f - \omega_o}{t} R$

Se tiene: $\mathbf{a_t = \alpha . R}$

Las unidades son: $a_t = m/s^2$

La aceleración total es igual a la suma vectorial de sus componentes es decir:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

El módulo de la aceleración total esta dado por:

$$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_c^{\,2}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Un disco compacto gira a partir del reposo a 500 rpm en 5,5 s. Calcular:
   a) La aceleración angular.
   b) El número de revoluciones que da en 5,5s
   c) La distancia que recorre un punto de la periferia del disco situado a 6 cm del centro durante los 5,5 s que tarda en alcanzar las 500 rpm.
   d) La aceleración centrípeta final
   e) La aceleración tangencial final
   f) El módulo de la aceleración total final

   Se conoce que :
   $\omega_o = 0$ rad/s
   ω_f = 500 rpm = 52,36 rad/s
   t = 5,5 s
   R = 6 cm = 0,06m

   a) Para determinar la aceleración aplicamos:

   $$\omega_f = \cancel{\omega_o}^{\,0} + \alpha . \Delta t$$

   $$\omega_f = \alpha . \Delta t \; ; \quad \alpha = \frac{\omega_f}{\Delta t}$$

   $$\alpha = \frac{52{,}36 \text{ rad/s}}{5{,}5 \text{ s}} \; ; \; \alpha = 9{,}52 \text{ rad/s}^2$$

   b) Para el desplazamiento angular utilizamos:

   $$\Delta\theta = \cancel{\omega_o}^{\,0} t + ½ \alpha t^2$$

   $$\Delta\theta = ½ \alpha t^2 \; ; \; \Delta\theta = ½(9{,}52 \text{ rad/s}^2)(5{,}5\text{s})^2$$

   $\Delta\theta$ = 143,99 rad.

   $$\Delta\theta = 143{,}99 \text{ rad} \left| \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right| = 22{,}92 \text{ rev}$$

   $\Delta\theta$ = 22,92 rev

   c) La distancia recorrida es igual a :

   d = R. $\Delta\theta$; d = 0,06m. 143,99 rad

   d = 8,64 m

   d) Para la aceleración centrípeta final necesitamos la v final.

   $v_f = \omega_f$ .R ; v_f = (52,36 rad/s).(0,06 m)

   v_f = 3,14 m/s

   $a_{cf} = \omega$.v ; a_{cf} =(52,36 rad/s).(3,14 m/s)

   a_{cf} = 164,49 m/s^2

   e) Para la aceleración tangencial aplicamos:

   $a_t = \alpha$. R ; a_t = (9,52 rad /s^2)(0.06m)

   a_t = 0,57 m/s^2

   f) La aceleración total está dada por la suma vectorial de la a_c y a_t

   $$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

   $$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_c^{\,2}}$$

   $$a = \sqrt{(0{,}57 \text{ m/s}^2)^2 + (164{,}49 \text{ m/s}^2)^2}$$

   a = 164,49 m/s^2

2. Un disco compacto es barrido por un laser que comienza en el radio más interno, de unos 2,4 cm y se mueve hacia afuera hasta alcanzar el borde a 6 cm. A medida que el laser se mueve de este modo, la velocidad angular del disco disminuye de 500 rpm a 200 rpm, con lo cual la velocidad lineal (tangencial) del disco donde incide el rayo láser permanece constante, y el desplazamiento que cubre el laser es de 22,92 rev. Calcular:
   a) La aceleración angular del disco compacto
   b) El tiempo que necesita para realizar este barrido el laser.

   Se sabe que:
   R1 = 2,4 cm
   R2 = 6 cm
   ω_o = 500 rpm = 52,36 rad/s
   ω_f = 200 rpm = 20,94 rad/s
   $\Delta\theta$ = 22,92 rev = 143,99 rad.

   a) Para calcular la aceleración angular del disco aplicamos:

   $$\omega_f^{\,2} = \omega_o^{\,2} + 2\,\alpha\,\Delta\,\theta \; ; \; \alpha = \frac{\omega_f^{\,2} - \omega_o^{\,2}}{2\,\Delta\,\theta}$$

   $$\alpha = \frac{(20{,}94 \text{ rad/s})^2 - (52{,}36 \text{ rad/s})^2}{2\,(143{,}99 \text{ rad.})}$$

   α = - 7.997 rad/s^2

   b) Para determinar el tiempo necesitamos:

   $$\omega_f = \omega_o + \alpha . \Delta t$$

$\Delta t = \frac{\omega_f - \omega_o}{\alpha}$;

$\Delta t = \frac{20{,}94 \text{ rad/s} - 52{,}36 \text{ rad/s}}{-7.997 \text{ rad/s}^2}$

$\Delta t = 3.93s$

3. Un automóvil tiene llantas de 30 cm de radio. parte del reposo y acelera uniformemente hasta una rapidez de 15 m/s en un tiempo de 8s. Encontrar la aceleración angular de las llantas y el número de vueltas que da la llanta en ese tiempo.

   Se sabe que:

   $R = 30 \text{ cm} = 0{,}3 \text{ m}$
   $v_o = 0 \text{ m/s}$
   $v_f = 15 \text{ m/s}$
   $t = 8 \text{ s}$
   $\omega_0 = 0 \text{ rad/s}$

   a) Para calcular la aceleración angular necesitamos:

   $a_t = \frac{\Delta v}{t}$; $a_t = \frac{15 \text{ m/s} - 0\text{m/s}}{8}$; $a_t = 1{,}88 \text{ m/s}^2$

   $a_t = \alpha \cdot R$; $\alpha = \frac{a_t}{R}$; $\alpha = \frac{1{,}88 \text{ m/s}^2}{0{,}3 \text{ m}}$

   $\alpha = 6{,}27 \text{ rad /s}^2$

   b) Para el número de vueltas aplicamos:

   $\Delta\theta = \omega_o t + ½ \alpha t^2$

   $\Delta\theta = 0 + ½ (6{,}27 \text{ rad /s}^2)(8s)^2$

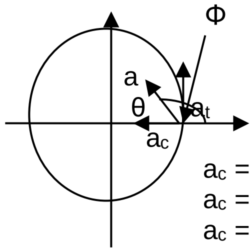
   $\Delta\theta = 200{,}64 \text{ rad.}$
   $\Delta\theta = 200{,}64 \text{ r}\cancel{\text{ad}}\text{.} \cdot \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ r}\cancel{\text{ad}}}$

   $\Delta\theta = 31{,}93 \text{ rev}$

4. Cuál será la aceleración resultante de una niña que se mueve en un caballo sobre un carrusel de 4 m de diámetro, si su velocidad angular media es de 6 rad/s y su aceleración angular es de 8 rad/s^2

   Se sabe que:
   $R = 2m$
   $\omega_m = 6 \text{ rad /s}$
   $\alpha = 8 \text{ rad/s}^2$

   Para determinar la aceleración total debemos determinar la aceleración tangencial y centrípeta:



$a_t = \alpha R$
$a_t = (8 \text{ rad/s})(2m)$
$a_t = 16 \text{ m/s}^2$

$a_c = \omega^2 \cdot R$
$a_c = (6 \text{ rad/s})^2 (2m)$
$a_c = 72 \text{ m/s}^2$

$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_c}$

$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_c^{\,2}}$

$a = \sqrt{16^2 + 72^2}$; $a = 73{,}76 \text{ m/s}^2$

$\theta = \tan^{-1}(a_t / a_c)$

$\theta = \tan^{-1}(16 / 72)$

$\theta = 12{,}53°$

$\Phi = 180° - 12{,}53°$

$\Phi = 167{,}47°$

$a = (73{,}76 \text{ m/s}^2 ; 167{,}47°)$

$a = (-72\, i \;\; 16\, j) \text{ m/s}^2$

EJERCICIOS TAREA

1. Una turbina de un jet se acelera de 0 a 7000 rpm en 30s. Si el radio de la turbina es de 1,5 m. Determinar:
   a) La velocidad angular final
   b) La velocidad angular media
   c) La aceleración angular
   d) La rapidez media
   e) El desplazamiento angular.
   f) La distancia recorrida en el extremo de la turbina.
   g) El módulo de la aceleración total final.

2. En las olimpiadas el atleta encargado del lanzamiento del disco gira a 110 rpm incrementando su rapidez a 580 rpm en 5s antes de soltarlo. Si la longitud del brazo es de 73 cm: Determinar:
   a) La aceleración angular.
   b) La aceleración centrípeta
   c) La aceleración tangencial del disco.
   d) La velocidad media
   e) El desplazamiento angular
   f) La distancia recorrida por el disco.

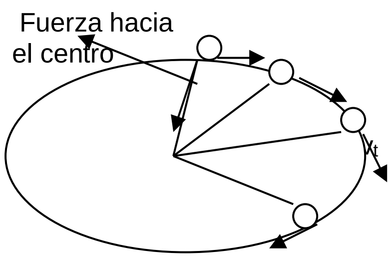
3. La rapidez angular de un disco decrece uniformemente de 14 rad /s a 6 rad /s en 18 s. Calcular:
   a) La aceleración angular
   b) El número de revoluciones que da en este tiempo.

4. Un auto parte del reposo, iniciando una curva de 140 m de radio y acelera constantemente a $2 m/s^2$. Determinar la distancia que habrá recorrido antes de que el módulo de la aceleración total sea de $4 m/s^2$.

5. En un castillo de juegos pirotécnicos un silbador esta unido a un aro de 0,50m de radio, demora 2 segundos en girar un ángulo de 5,24 rad y alcanza una velocidad angular final de 30 rpm. Calcular:
   a) La velocidad angular media
   b) La velocidad angular inicial
   c) La aceleración angular
   d) La rapidez inicial
   e) La distancia recorrida
   f) La aceleración tangencial final
   g) La aceleración centrípeta final
   h) El módulo de la aceleración total final

FUERZAS NECESARIAS PARA EL MOVIMIENTO CIRCULAR.

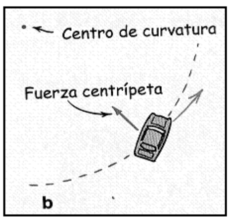
Como ya se analizó anteriormente el movimiento circular uniforme es aquel en el cual no existe cambio en la rapidez, sino solo en la dirección.
Esta afirmación se puede verificar al hacer girar una piedra atada a un cordel, la cual, al hacerla girar con una rapidez constante, la fuerza hacia el centro del movimiento producirá una tensión en la cuerda que modifica constantemente la dirección del movimiento de la piedra lo que produce una trayectoria circular. Si la cuerda se rompe, la piedra sale en dirección tangente al movimiento circular.



LA FUERZA CENTRÍPETA.

La fuerza que se produce en la cuerda y que está dirigida hacia el centro del movimiento circular uniforme recibe el nombre de ***fuerza centrípeta.***

Al aparecer la fuerza centrípeta, también aparece la fuerza de reacción llamada fuerza centrífuga, sin embargo, al momento de dibujar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo solamente debemos graficar la centrípeta ya que si dibujamos las dos estas se anularían y estaríamos analizando un MRU.



Al existir un cambio de velocidad en la unidad de tiempo se genera la aceleración centrípeta (a_c) que también tiene la misma dirección que la fuerza centrípeta (F_c)

La aceleración centrípeta que tiene la piedra de masa m es directamente proporcional a la velocidad lineal al cuadrado e inversamente proporcional al radio de giro.

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Puesto que la velocidad tangencial se relaciona con la velocidad angular por medio de $v_t = \omega . r$, se tiene:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad , a_c = \frac{(\ \omega . r\ )^2}{r} \quad ; \quad a_c = \omega^2 . r$$

Por la segunda ley de Newton del movimiento, la magnitud de esta fuerza debe ser igual al producto de la masa por la aceleración centrípeta, así:

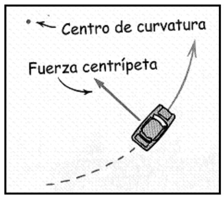
$$F_c = m . a_c$$

$$F_c = m . \frac{v^2}{r}$$

$$F_c = m . \omega^2 . r$$

La fuerza centrípeta (*en busca del cetro o hacia el centro*) no pertenece a una nueva clase de fuerza, sino tan sólo es el nombre que se le da a cualquier fuerza, sea una tensión de cordel, la gravedad, fuerza eléctrica o la que sea, que se dirija hacia un centro fijo. Si el movimiento es circular y se ejecuta con rapidez constante, esta fuerza forma ángulo recto con la trayectoria del objeto en movimiento.

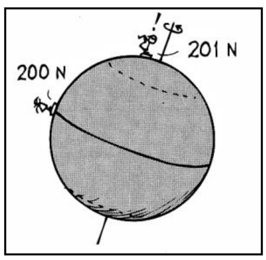
Cuando un automóvil da vuelta una esquina, la fricción entre los neumáticos y el asfalto proporciona la fuerza centrípeta que lo mantiene en una trayectoria curva.



Si esta fricción no es suficientemente grande (a causa de aceite o gravilla en el pavimento, por ejemplo), el automóvil no podría tomar la curva y los neumáticos patinan hacia un lado, entonces se dice que el automóvil derrapa.

FUERZA CENTRIFUGA

Aunque la fuerza centrípeta es una fuerza dirigida hacia el centro, alguien dentro de un sistema en movimiento circular parecerá experimentar una fuerza hacia afuera. Esta fuerza aparente hacia afuera se llama fuerza centrífuga (que huye del centro o se aleja del centro).
En el marco de referencia de la Tierra giratoria, se siente



una fuerza centrífuga que hace disminuir un poco nuestro peso, también sucede que tenemos la máxima rapidez tangencial cuando estamos en el ecuador, en consecuencia la fuerza centrífuga es máxima para nosotros cuando estamos en el ecuador y cero en los polos, donde no tenemos rapidez tangencial. Con este concepción podemos decir que nosotros los Ecuatorianos tenemos menos peso que los que están en otras zonas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En el Vulcano Park el juego llamado Pulpo lleva pasajeros en una trayectoria circular con un radio de 7,7 m. El viaje hace una rotación completa cada 4 s. Calcular:
   a) La velocidad angular de un pasajero de 50 kg debido al movimiento circular.
   b) La fuerza centrípeta que experimenta el pasajero.

   a) El periodo T = 4 s, podemos usarlo para calcular la velocidad angular como:

   $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$; $\omega = \frac{2\,\pi\,\text{rad}}{4\,\text{s}}$; $\omega = 1{,}6$ rad/s

   b) Como la trayectoria es circular, podemos calcular la F_c con:

   $a_c = \omega^2 r$; $a_c = (1{,}6 \text{ rad/s})^2 (7{,}7 \text{ m})$; $a_c = 19{,}71 \text{ m/s}^2$

   $F_c = m\,a_c$; $F_c = (50 \text{ kg})(19{,}71 \text{ m/s}^2)$;

   $F_c = 985{,}5$ N

2. Calcular la fuerza aproximada que ejerce la Tierra sobre la Luna si esta tiene una masa de $7{,}35 \times 10^{22}$ kg, el radio de la órbita lunar es de $3{,}84 \times 10^{8}$ m y el periodo lunar es de 27,3 días.

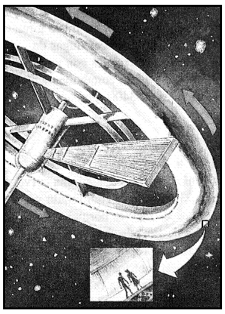
   Si asumimos que la órbita de la Luna es circular en relación con una Tierra estacionaria, esta fuerza viene a ser la fuerza centrípeta:

   $F_c = m\,a_c$; $F_c = m\,\frac{v^2}{r}$; $F_c = m\,\frac{4\,\pi^2\,r}{T^2}$

   $F_c = (7{,}35 \times 10^{22} \text{ kg})\ \frac{4\,\pi^2 (3{,}84 \times 10^8 \text{ m})}{(2{,}35 \times 10^6)^2}$

   $F_c = 2{,}02 \times 10^{20}$ N

3. Imagínese una estación espacial gigantesca en forma de rosquilla, tan alejada de todos los cuerpos celestes que se puede despreciar la fuerza de la gravedad. Para permitir a los ocupantes vivir una vida normal, la estación tiene un movimiento rotacional y los habitantes viven en la parte más alejada del centro. Si el diámetro exterior de la estación espacial es de 1,5 km. Calcular su periodo de rotación de modo que los pasajeros en la periferia puedan percibir una gravedad artificial igual a la gravedad normal en la superficie terrestre.



El peso de una persona en la Tierra está dado por:

P = m g. ; P = F ; F = m.g

La fuerza centrípeta requerida para llevar a la persona alrededor de un círculo de radio r es:

$F_c = m\,a_c$; $F_c = m\,\frac{v^2}{r}$; $F_c = m\,\frac{4\,\pi^2\,r}{T^2}$

Para que la gravedad artificial sea igual a g, podemos igualar las dos ecuaciones y despejar T

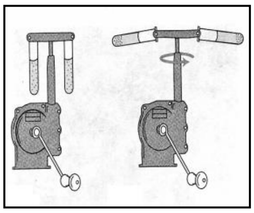
$\cancel{m}.g = \cancel{m}\,\frac{4\,\pi^2\,r}{T^2}$;

$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{750 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}}$; T = 54,97 s

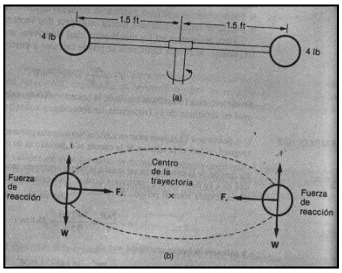
T = 0,92 min.

EJERCICIOS TAREA

1. Una maquina centrifugadora sencilla utilizada para separar los glóbulos del plasma sanguíneo, gira a 55 rev/s. Calcular:
   a) La aceleración centrípeta en el centro del tubo de la centrifuga a 8 cm del eje de rotación.
   b) La fuerza centrípeta que se ejerce sobre 5g del plasma sanguíneo.



2. Dos masa de 4 lb giran alrededor de un eje central de 1,6 pies de radio, a una velocidad angular de 12 rev/s. Calcular:
   a) La fuerza centrípeta que actúa sobre cada uno de los cuerpos.
   b) La tensión de la barra.



3. Calcular la fuerza centrípeta sobre un automóvil de 2000 kg que toma una curva de 175 m de radio a una velocidad de 50 km/h

4. Una pelota de 3 lb está atada a una cuerda y se mueve en un círculo horizontal de 3 pies de radio. Desprecie los efectos de la gravedad, si se sabe que gira a 80 rpm. Calcular:
   a) La velocidad lineal.
   b) La aceleración centrípeta

c) La fuerza centrípeta.
d) Qué pasa si la cuerda se rompe.

5. Un electrón gira en órbita alrededor del núcleo en una trayectoria circular de 6×10^{-9} cm de radio. Si la masa del electrón es de $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg y su velocidad lineal es de $3{,}2 \times 10^{6}$ m/s. calcular la aceleración centrípeta y la fuerza centrípeta.

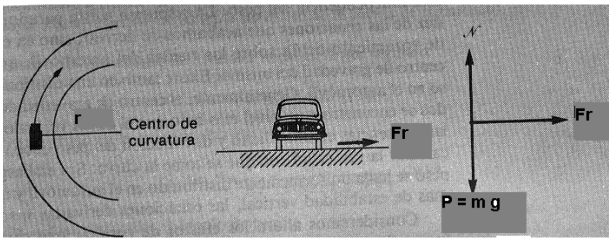
PERALTE

ROZAMIENTO EN UNA CURVA

Cuando un automóvil toma una vuelta cerrada en una carretera perfectamente horizontal, la fuerza centrípeta necesaria es desarrollada por el rozamiento entre las llantas y el pavimento. Si esta fuerza centrípeta no es la adecuada, el automóvil puede derrapar sobre la carretera.

El valor máximo de la fuerza de rozamiento determina la velocidad máxima con la que el vehículo puede tomar una curva de un radio determinado.

Cuando la velocidad del automóvil es máxima se produce que la fuerza centrípeta es igual a la fuerza máxima de rozamiento estático.



$F_c = fr_e$ $\qquad \Sigma F_y = 0$

$$\frac{m\,v^2}{r} = \mu_e N \qquad N = P$$

$$\frac{m\,v^2}{r} = \mu_e\, m\, g \; ; \qquad v^2 = \mu_e\, g\, r$$

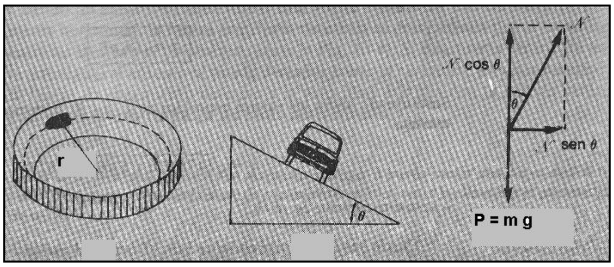
La velocidad máxima con la que el automóvil puede tomar la curva está dada por:

$$v = \sqrt{\mu_e\, g\, r}$$

PERALTE DE CURVAS

Con el objeto de no confiar en el rozamiento, las curvas se inclinan para proporcionar la fuerza centrípeta necesaria para poder girar sin salirse de las carreteras. Este ángulo de inclinación que se da a las carreteras recibe el nombre de **peralte.**

Al peraltar una carretera para eliminar la fuerza de rozamiento, se da que la fuerza normal N (entre el piso y las ruedas sobre las cuales se encuentran distribuidas todo el peso de vehículo) tenga componentes horizontal y vertical.



La componente horizontal de la normal debe ser igual a la fuerza centrípeta para que pueda tomar la curva con facilidad, así se tiene:

$N_x = F_c \qquad \Sigma F = 0$

$$N \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r} \qquad N_y = P$$

$$N \cos\theta = m\, g$$

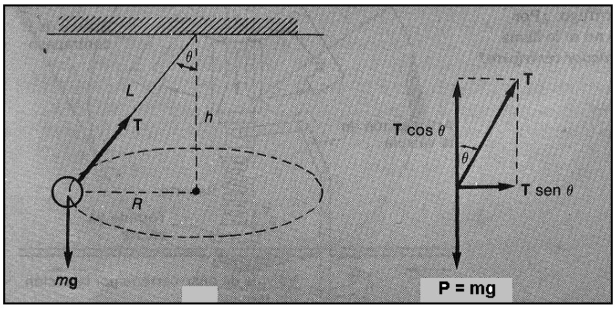
Dividimos la primera ecuación entre la segunda y obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{r\,g}$$

Esta ecuación nos permite calcular el ángulo del peralte que debe tener una carretera.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{r\,g}\right)$$

EL PÉNDULO CÓNICO



Un péndulo cónico está formado por una masa m colgada de un hilo de longitud L que describe un circulo horizontal con velocidad constante v. La aceleración tiene la dirección de la fuerza centrípeta. La fuerza centrípeta es proporcionada, por la componente horizontal de la tensión en el hilo. La componente vertical de la tensión es igual al peso del objeto en movimiento. Así:

$T_x = F_c \qquad \Sigma F = 0$

$$T \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r} \qquad T_y = P$$

$$T \cos\theta = m\, g$$

Dividimos la primera ecuación entre la segunda y obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{r\,g} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{r\,g}\right)$$

Cuando se hace girar con mayor velocidad lineal al péndulo, el ángulo formado entre el hilo y la vertical también aumente, por lo tanto la posición vertical de la masa sufre una elevación.

La tensión de la cuerda está dada por:

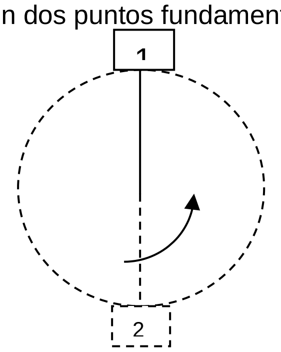
$$T = \frac{m\,g}{\cos\Theta}$$

La rapidez de la masa estará dada por:

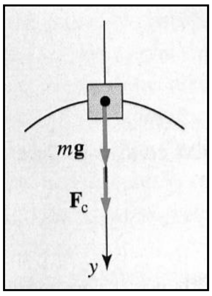
$$v = \sqrt{r\,g\tan\Theta}$$

LA FUERZA CENTRIPETA EN LOS OBJETOS QUE GIRAN EN UNA CIRCUNFERENCIA VERTICAL.

Para cuando un objeto gira siguiendo una trayectoria circular podemos describir las fuerzas que actúan sobre este en dos puntos fundamentales:



1. En la parte superior de la trayectoria:



$\Sigma F_y = ma_y$

$F_c + mg = m\,\dfrac{v_1^2}{R}$

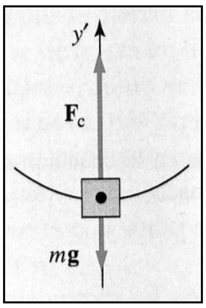
$F_c = m\left(\dfrac{v_1^2}{R} - g\right)$

2. En la parte inferior de la trayectoria

$\Sigma F_y = ma_y$

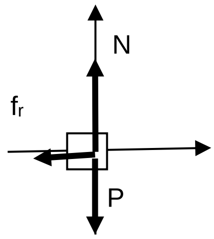
$F_c - mg = m\,\dfrac{v_2^2}{r}$

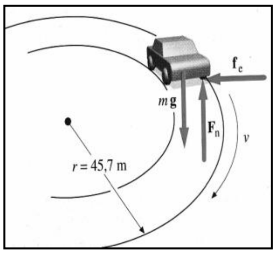
$F_c = m\left(\dfrac{v_2^2}{r} + g\right)$



EJERCICIOS RESUELTOS

1. Se prueba un nuevo prototipo de neumáticos para ver si su comportamiento cumple las previsiones. En una prueba de deslizamiento, el modelo BMW 530i fue capaz de recorrer a velocidad constante un circulo de 45,7 m de radio en 15,2 s sin patinar. Calcular:
   a) La velocidad del vehículo.
   b) La aceleración centrípeta.
   c) El valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático.
   d) El valor del ángulo del peralte para el cual el vehículo tome la curva a la misma velocidad sin el uso de la fuerza de rozamiento.





a) La velocidad podemos determinar con:

$$v = \frac{2\,\pi\,R}{T} \; ; \; v = \frac{2\,\pi\,(45{,}7\text{ m})}{15{,}2\text{ s}} \; ; \; v = 18{,}90\text{ m/s}$$

b) La aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \; ; \quad a_c = \frac{(18{,}90\frac{m}{s})^2}{45{,}7\text{ m}} \; ; \; a_c = 7{,}81\text{ m/s}^2$$

c) $\Sigma F_y = 0$

$N - P = 0 \;;\; N = P \;;\; N = m\,.\,g$

$\Sigma F_x = m.\,a$

$-f_r = m\,.\,a \;;\; -\mu\,N = m\,.\,a \;;\; -\mu\,\cancel{m}\,g = \cancel{m}\left(-\dfrac{v^2}{r}\right)$

$$\mu = \frac{v^2}{r\,g} \; ; \; \mu = \frac{\left(18{,}9\,\frac{m}{s}\right)^2}{(45{,}7\text{ m})(9{,}81\frac{m}{s^2})} \; ; \; \mu = 0{,}796$$

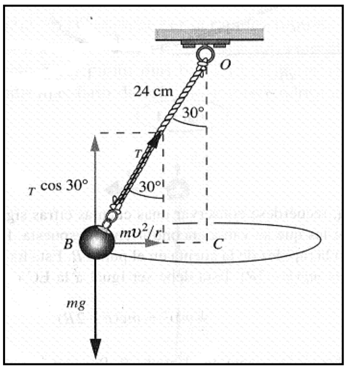
2. El valor del ángulo del peralte se calcula con:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{r\,g}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(18{,}90\frac{m}{s})^2}{(45{,}7\text{ m})(9{,}8\frac{m}{s^2})}\right)$$

$\theta = 38{,}58^{0}$

2. Una pelota B de masa 500 g está amarrada a un extremo del cordel de 24 cm de longitud, y el otro extremo se encuentra sujeto a un punto fijo O. La pelota se mueve en un círculo horizontal.



Calcular:

a) La rapidez de la pelota en su trayectoria circular si el cordel forma un ángulo de 30 ^{0} con la vertical.

b) La tensión de la cuerda.

a) Para la velocidad utilizamos:

sen $30^0 = \frac{BC}{0{,}24\ m}$; BC = r =(0,24 m)(sen$30^0$)

r = 0,12 m

v=$\sqrt{r\, g \tan\Theta}$;

v= $\sqrt{(0{,}12m)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(\tan 30^0)}$

v = 0,82 m/s

b) La tensión de la cuerda está dada por:

T = $\frac{m\ g}{\cos\Theta}$; T = $\frac{(0{,}5\ kg)(9{,}8\frac{m}{s^2})}{\cos 30^0}$; T = 5,65 N

3. Con que fuerza se presionará contra su asiento un piloto de prueba de un MIC de la Fuerza Aérea Ecuatoriana , de 160 lb en la parte más baja y más alta de una vuelta de 2400 pies de radio si viaja a 280 m/s.

Sabemos que m = 160 lb; m = 72,73 kg
r = 2 400 pies ; r = 731,52 m
v = 280 m/s

Para calcular la fuerza con la que se presiona contra el asiento utilizamos:

a) Para la parte más baja:

F_c = m ($\frac{v^2}{r}$ + g)

F_c = (73,73 kg) ($\frac{(280\frac{m}{s})^2}{731{,}52\ m}$ + 9,8 m/ s ^{2})

F_c = 8 624 ,50 N

b) Para la parte más alta:

F_c = m ($\frac{v^2}{r}$ - g)

F_c = (73,73 kg) ($\frac{(280\frac{m}{s})^2}{731{,}52\ m}$ - 9,8 m/ s ^{2})

F_c = 7 179,39 N

Si el peso del piloto es de 712,75 N podemos afirmar que en la parte más baja tiene que soportar una fuerza 12 veces mayor que su propio peso que equivale a 12 g (12 veces el valor de la gravedad terrestre) y en la inferior 10 g.

EJERCICIOS TAREA

1. En un día lluvioso, el coeficiente de rozamiento entre las llantas y el pavimento es de 0,4. Determinar:
   a) La velocidad máxima que podrá tomar un automóvil una curca de 80 m de radio.
   b) El ángulo de peralte que será necesario para eliminar el rozamiento a una velocidad de 80 km/h.

2. Un piloto de prueba cae en picada a 200 m/s y gira en una curva de 850 m de radio. Si el piloto tiene 65 kg . Calcular:
   a) La fuerza ejercida sobre él por el asiento.
   b) La aceleración que siente en el punto más bajo de la picada.
   c) Cuantas veces mayor que g es la aceleración.

3. Una curva de radio 150 m tiene un peralte con un ángulo de 10 ^{0}. Un auto de 800 kg toma la curva a 85 km/h sin patinar. Determinar:
   a) La fuerza normal que actúa sobre los neumáticos ejercidas por el pavimento.
   b) La fuerza de rozamiento ejercida por el pavimento sobre los neumáticos del coche.
   c) El coeficiente de rozamiento estático mínimo entre el pavimento y los neumáticos.

4. Un vehículo de 1 000 kg describe una curva horizontal de 30 m de radio. Si µ = 0,2 . Calcular:
   a) La máxima velocidad en km/h que podrá tomar la curva sin derrapar si no hubiese peralte.
   b) El peralte de la curva para que no derrape a la velocidad de 90 km/h

5. Se suspende una bola de 0,436 kg en una cuerda de 0,452 m de un punto fijo. La bola oscila en una trayectoria circular horizontal a 0,811 rev/s. Calcular:
   a) La tensión de la cuerda
   b) El ángulo entre la cuerda y la vertical

6 Un piloto acróbata en un aeroplano desciende verticalmente a una velocidad de 210 km/h y voltea en forma vertical hacia arriba siguiendo una trayectoria casi semicircular con un radio de 180m. Determinar:
   a) Cuantas g experimenta el piloto debido sólo a su movimiento.
   b) El valor del factor que parece incrementar el peso del piloto en el fondo de la picada.