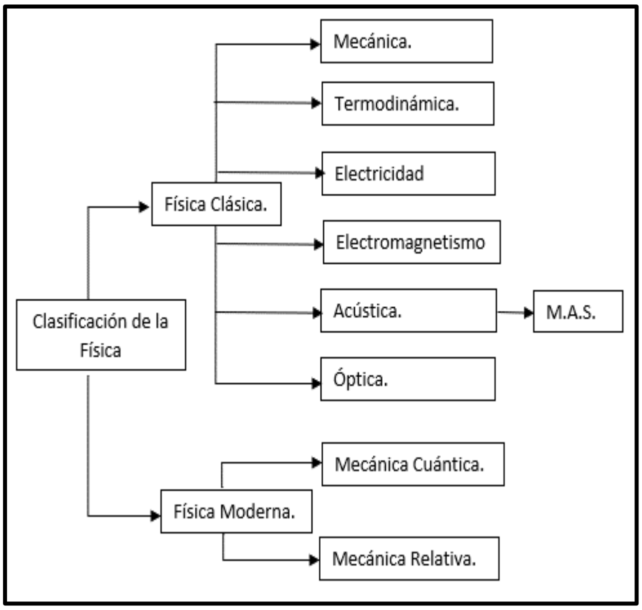
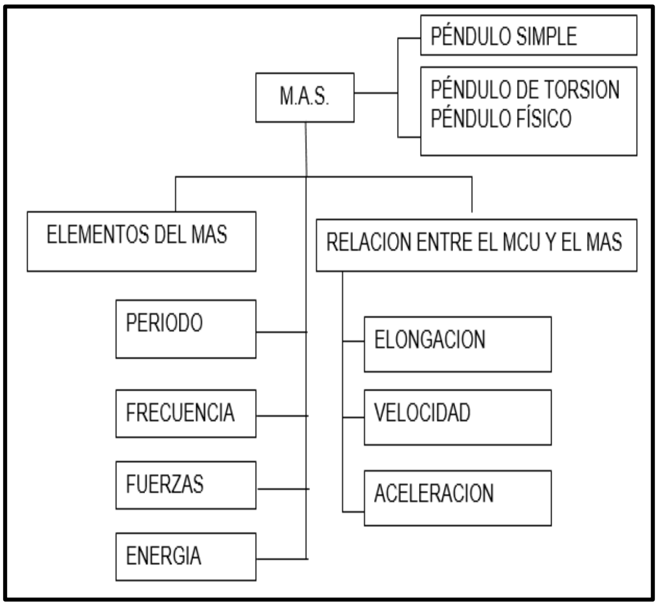
MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE





Resultados de Aprendizaje:

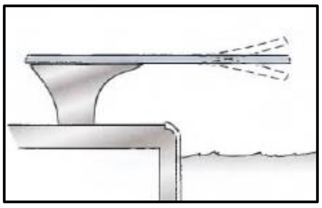
1. Define al movimiento armónico y lo aplica en ejemplos de la conservación de la energía mecánica con solvencia.
2. Emplea el círculo de referencia para describir la variación en magnitud y dirección del desplazamiento, velocidad y aceleración para el movimiento armónico simple.
3. Escribe y aplica fórmulas para la determinación del desplazamiento x, velocidad v y aceleración a en términos del tiempo, frecuencia y amplitud.
4. Calcula la frecuencia del periodo del movimiento armónico simple cuando la posición y la aceleración se dan.
5. Describe el movimiento de un péndulo simple, físico y de torsión y calcula el período de oscilación.
6. Analiza los tipos de energía que se producen en el M.A.S.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

El tipo de movimiento que vamos a estudiar, no pertenece a ninguna de las calases de movimientos estudiados anteriormente, es decir, no es un ***movimiento uniforme ni uniformemente variado***, esté es un movimiento que se presenta con mucha frecuencia en la naturaleza, con muchas aplicaciones en la tecnología moderna, lo que nos indica que tendrá sus propias leyes que las deduciremos a continuación.

MOVIMIENTO PERIÓDICO

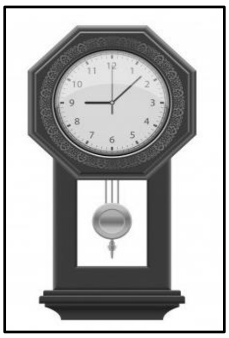
Si consideramos el movimiento de un trampolín, después de que un clavadista dio el salto, este continuará vibrando, alrededor de su posición normal, durante un tiempo determinado,



Este tipo de movimiento se lo considera ***periódico*** ya que un cuerpo se mueve de un lado a otro en una trayectoria fija, regresando a cada posición y velocidad después de un intervalo de tiempo definido. El movimiento planetario, es un ejemplo de este tipo de movimiento.

Este movimiento también se lo puede considerar como ***vibratorio*** ya que su movimiento no tiene límites fijos exactos en los extremos, puesto que las fuerzas de rozamiento van "disipando" la energía del sistema, atenuando la vibración hasta hacerla desaparecer. La cuerda de una guitarra es un ejemplo de este movimiento, ya que luego de ser puesta en ***vibración*** va atenuándose hasta desaparecer.

MOVIMIENTO OSCILATORIO

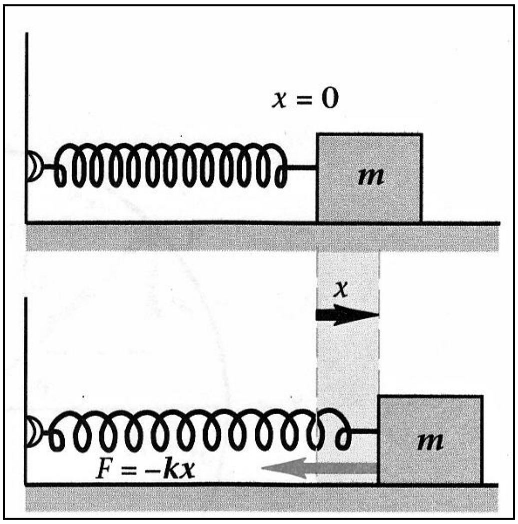


Cuando tenemos un objeto, cuyo desplazamiento va de un lado hacia a otro de un punto llamado "punto de equilibrio", se considera un ***movimiento oscilatorio*** o ***movimiento de vaivén.*** Ejemplo de este movimiento es el realizado por un péndulo de un reloj al ser separado de su posición de equilibrio, este se mantiene oscilando mientras se le entregue energía, a través de un resorte espiral, el mismo que almacena energía cuando el reloj esta dado cuerda.

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE (M.A.S.)

Si consideramos un deslizador acoplado a un resorte, el cual lo encogemos hacia el lado izquierdo y luego lo soltamos este oscilará alrededor de la posición de equilibrio.

Para que él deslizador describa un ***movimiento periódico*** necesita de la existencia de una fuerza de restitución que siempre es opuesta al desplazamiento lo que hace que aparezca el signo menos.



La ecuación de la fuerza de restitución de acuerdo a la ley de Hook está dada por:

$$F = -k\,x$$

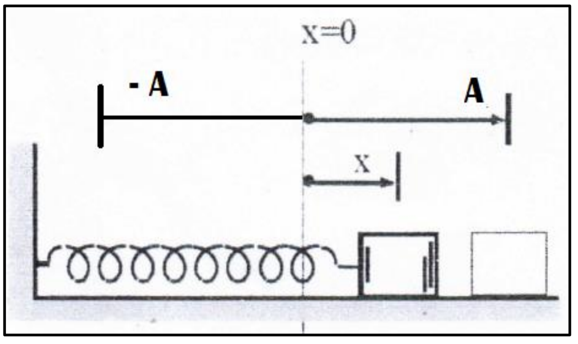
Se puede entonces afirmar que el ***MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M. A. S.),*** es el movimiento periódico y oscilatorio realizado por un objeto en ausencia de rozamiento, producido por una fuerza de restitución que es directamente proporcional al desplazamiento y aplicada en la misma dirección, pero de sentido contrario.

ELEMENTOS DEL M.A.S.

- ***OSCILACION***: Es el movimiento de ida y vuelta efectuado por él deslizador, recorriendo la trayectoria completa.
- ***POSICIÓN DE EQUILIBRIO*** (PE) : Es el punto situado en la mitad de la trayectoria, no necesariamente el movimiento debe iniciarse en este punto.
- ***ELONGACIÓN*** (x). Es la distancia medida desde la posición de equilibrio hasta el lugar donde se encuentra el deslizador en un instante cualquiera. Sirve para ubicar el móvil.

- ***AMPLITUD*** (A): La distancia entre la posición de equilibrio y cualquiera de los extremos de la trayectoria, es en esta posición donde el objeto experimenta la fuerza máxima de restitución y su aceleración es mayor. La fuerza de restitución es igual a cero en la posición de equilibrio así como la aceleración.

  La amplitud es el máximo valor que puede tener la elongación, el deslizador en una oscilación completa tiene cuatro amplitudes.



- ***PERIODO*** (T): Es el tiempo necesario para que se complete un recorrido completo u oscilación.

$$T = \frac{t}{n}$$

$$T = \frac{\text{tiempo transcurrido}}{\text{número de oscilaciones}}$$

La unidad en el sistema internacional es el segundo (s).

- ***FRECUENCIA*** (f) : Es el número de oscilaciones completas en la unidad de tiempo es decir es el recíproco del periodo.

$$f = \frac{n}{t} \quad ; \quad f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{\text{número de oscilaciones}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

  La unidad en el sistema internacional es el hertz (Hz), en honor a Heinrich Hertz, quien demostró la existencia de las ondas de radio 1886. Una oscilación por segundo es 1 Hz. Las frecuencias mayores se miden en kilohertz (kHz) , megahertz (MHz), gigahertz (GHz).
  Las ondas de radio AM se miden en kilohertz,(960 kHz es 960 000 vibraciones por segundo), en tanto que las de radio FM en megahertz, (101,7 MHz es 101 700 000 de hertz), un radar y los hornos microondas funcionan con frecuencias de gigahertz.

$$1\ \text{Hz} = \frac{1}{s} = s^{-1}$$

- ***PULSACIÓN, FRECUENCIA ANGULAR O VELOCIDAD ANGULAR (ω):***
  Constituye le número de periodos comprendidos entre 2π unidades de tiempo.

- ***DESFASE, FASE INICIAL (ϕ) :*** Su valor determina la posición del cuerpo en el instante inicial.
  Un parámetro ϕ se emplea en el M.A.S. para caracterizar su inicio. Este parámetro ϕ se denomina constante de fase.
  El valor de ϕ indica cómo empezó el M.A.S.

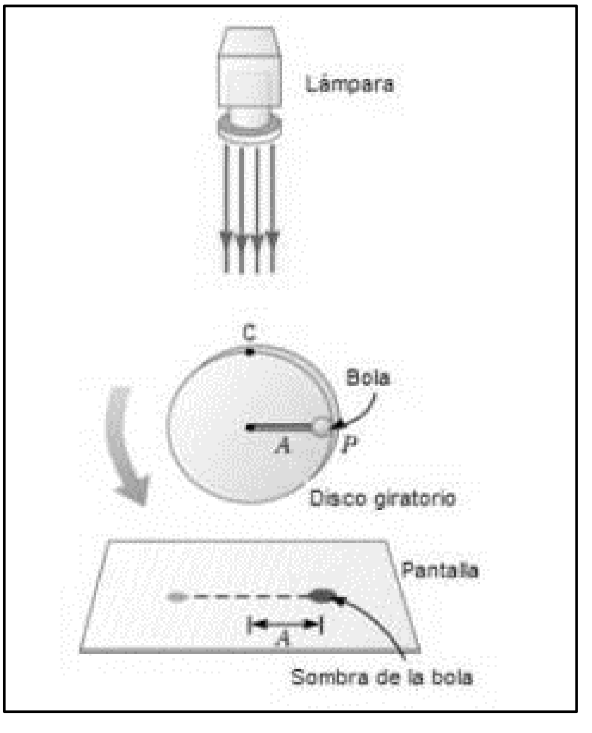
  Si $\phi = 0^0$, empezó en el extremo derecho.

  Si $\phi = 90^0$, empezó en el punto de equilibrio, desde donde fue lanzado.

  Si $\phi = 180^0$, empezó en el extremo izquierdo.

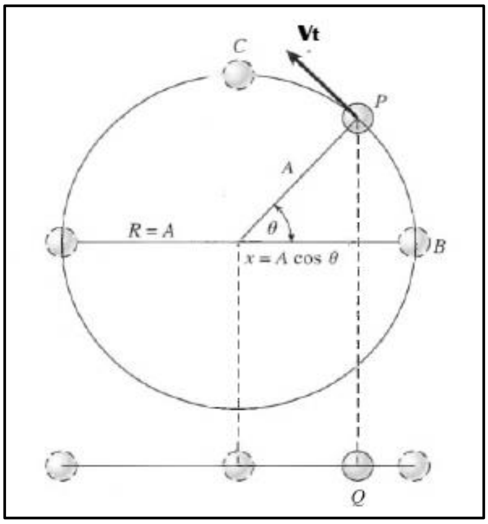
RELACION ENTRE EL M.C.U. Y EL M.A.S.

Para poder describir el M. A. S. se utiliza un objeto que gira con MCU, cuya sombra proyectada sobre el piso la que describe este tipo de movimiento.



ELONGACION EN EL M.A.S.

Analizamos la sombra del disco giratorio que para este caso se lo llamara el punto P. El radio del disco de referencia es igual a la amplitud de oscilación. La rapidez lineal V_t y la rapidez angular ω del punto de referencia P serán constantes.



La proyección Q se mueve de un lado a otro con MAS. El tiempo es considerado cero cuando el punto de referencia P se encuentra en B. Para cierto tiempo t posterior, el punto de referencia P se habrá desplazado un ángulo Θ. Es así que:

$\cos \Theta = \frac{x}{A}$; entonces: $x = A \cos \theta$

Si : $\theta = \omega t$.

$x = A \cos (\omega t)$

Además: $\omega = 2 \pi f$

$$\mathbf{x = A \cos (2 \pi f t)}$$

$$\mathbf{x = A \cos (\omega . t)}$$

Esta ecuación se la utiliza para determinar el desplazamiento o elongación (x) del cuerpo en el plano que se está moviendo con M. A. S. y está en función de la amplitud A y de la frecuencia f.

La unidad en el sistema internacional de la elongación es el metro (m).

Se considera el signo positivo a x, cuando la partícula se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio y el signo negativo cuando está a la izquierda.

Al ir girando del punto de referencia B, su posición P tiene un movimiento de vaivén sobre el diámetro horizontal, alrededor del punto central O, el mismo que representa la posición de equilibrio.

Para cualquier tiempo t, $(\omega.t + \phi)$ es el ángulo entre OP y el eje de referencia X, y se denomina fase del movimiento.

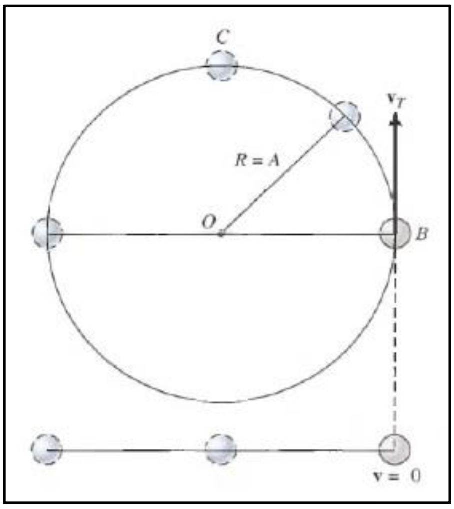
$$\mathbf{x = \pm A \cos (2 \pi f t + \phi)}$$

Si se tiene dos movimientos $x = A \cos (\omega t + \phi)$ y $x' = A' \cos (\omega t + \phi')$, la diferencia de fase es:
$(\omega t + \phi) - (\omega t + \phi') = \phi - \phi'$
Si $\phi - \phi' = 0^0$, los movimientos están en fase.
Si $\phi - \phi' = 180^0$, los movimientos están en oposición de fase.

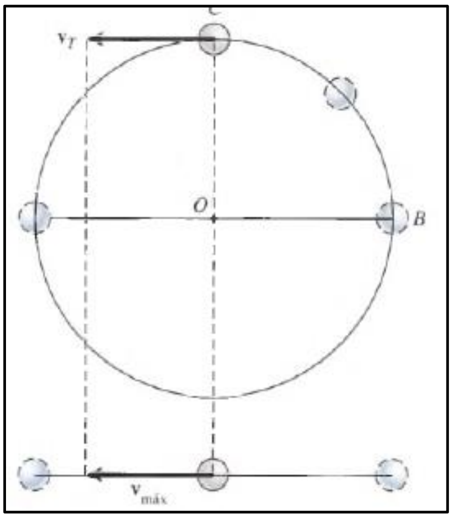
LA VELOCIDAD EN EL M.A.S.

De igual manera que en el caso anterior para la velocidad del objeto que tiene M. A. S. se describe a partir del siguiente análisis:

La velocidad es cero cuando su desplazamiento es máximo.



Como el movimiento es acelerado hacia el centro por efecto de la fuerza de restitución se tiene que la velocidad es máxima en el centro de la oscilación o cuando la elongación es igual a 0 m.



Para cualquier posición tenemos:

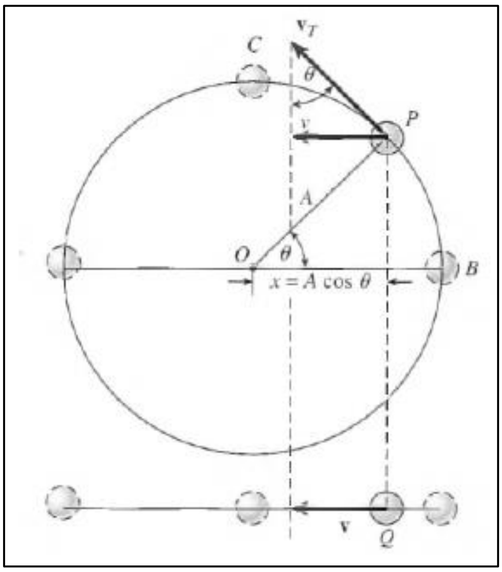
La esfera giratoria tiene una velocidad tangencial v_t en el punto P y la componente horizontal de esta velocidad representa la velocidad del MAS.

sen θ = $\frac{v}{-v_T}$; entonces : $v = - v_T \operatorname{sen} \theta$

como: $\theta = \omega t$.

$$v = - v_T \operatorname{sen} (\omega t)$$

además: $v_T = \omega A$



$$v = - \omega A \operatorname{sen} (\omega t)$$

$$\omega = 2 \pi f$$

$$\mathbf{v = - 2 \pi f A \operatorname{sen} (2 \pi f t)}$$

Esta ecuación permite hallar la velocidad del cuerpo en vibración para cualquier instante, considerando que el sen Θ es negativo cuando el punto de referencia se encuentra debajo del diámetro del círculo de referencia.

El signo de la velocidad es positivo, cuando la partícula se mueve hacia la derecha y negativo si lo hace la izquierda, y cuando se encuentra fuera de la posición de equilibrio se denomina fase del movimiento:

$$\mathbf{v = - 2 \pi f A \operatorname{sen} (2 \pi f t + \phi)}$$

Si Θ es igual a 90^0 o π/2 rad se tiene que

Sen Θ = 1; entonces:

$$\mathbf{v_{max} = - 2 \pi f A}$$

La velocidad en función de la amplitud y la posición se puede deducir de la siguiente manera:

Sea y la distancia entre el punto P y el radio de la circunferencia:

$$y = \sqrt{A^2 - x^2}$$

si: $\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{A}$ y $v = - 2\pi f A \operatorname{Sen} \theta$

se tiene : $v = -2 \pi f A \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A}$

$$\mathbf{v = - 2 \pi f \sqrt{A^2 - x^2}}$$

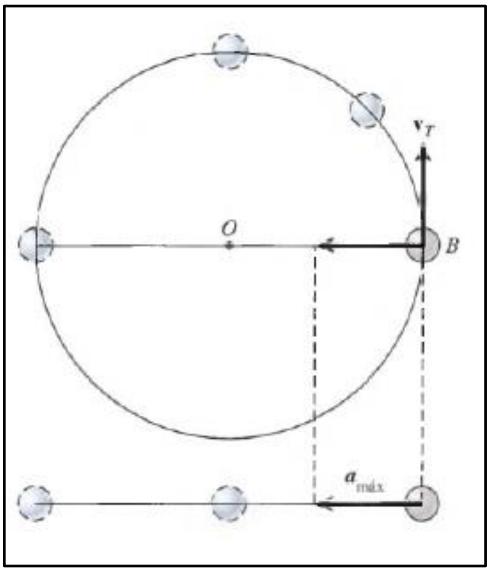
Esta ecuación sirve para determinar la velocidad de un cuerpo en vibración para cualquier instante en función de la amplitud y el desplazamiento.

LA ACELERACIÓN EN EL M.A.S.

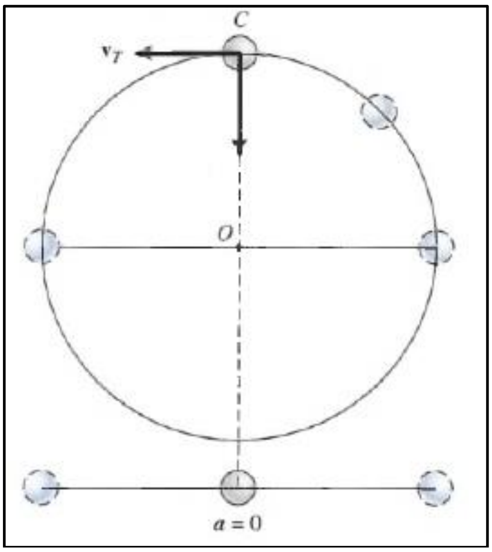
La aceleración de un cuerpo con M. A. S. se determina de la siguiente manera:

La velocidad de un cuerpo cuando vibra nunca es constante, por tal razón la aceleración para un cuerpo con MAS está dada de la siguiente manera:

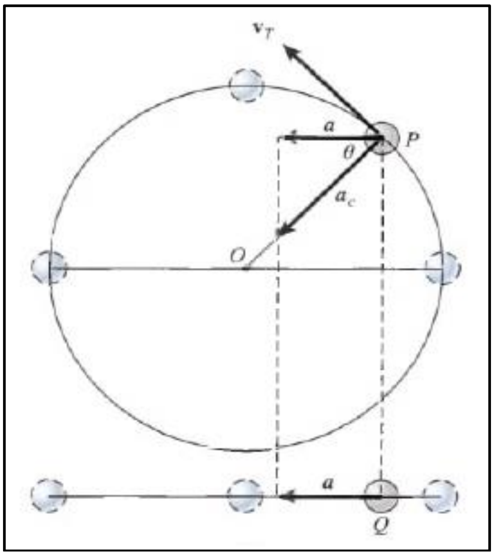
En la posición de máximo desplazamiento, la velocidad del objeto en vibración es cero por tanto la aceleración es máxima.



A medida que el cuerpo se acerca a la posición de equilibrio la aceleración disminuye hasta que es cero en el centro de oscilación. En la posición de equilibrio, la aceleración es cero y la velocidad tiene su valor máximo.



Para otras posiciones se tiene:



$\cos\theta = \dfrac{a}{-a_c}$; entonces: $a = -a_c \cos\theta$

Como : $\theta = \omega t$.

$a = -a_c \cos(\omega t)$

$a_c = \omega^2 R$ y $R = A$

$a = -\omega^2 A \cos \omega t$

$\omega = 2\pi f$

$\mathbf{a = -4\pi^2 f^2 A \cos(2\pi f t)}$

En función del ángulo de fase:

$\mathbf{a = -4\pi^2 f^2 A \cos(2\pi f t + \phi)}$

Esta ecuación puede reducirse si consideramos que:

$x = A\cos\theta$; $\cos\theta = \dfrac{x}{A}$

$\cos\theta = 2\pi f t$

$a = -4\pi^2 f^2 A \dfrac{x}{A}$;

$\mathbf{a = -4\pi^2 f^2 x}$

$\mathbf{a = -\omega^2 . x}$

Se puede afirmar que la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento en la misma dirección pero de sentido contrario.

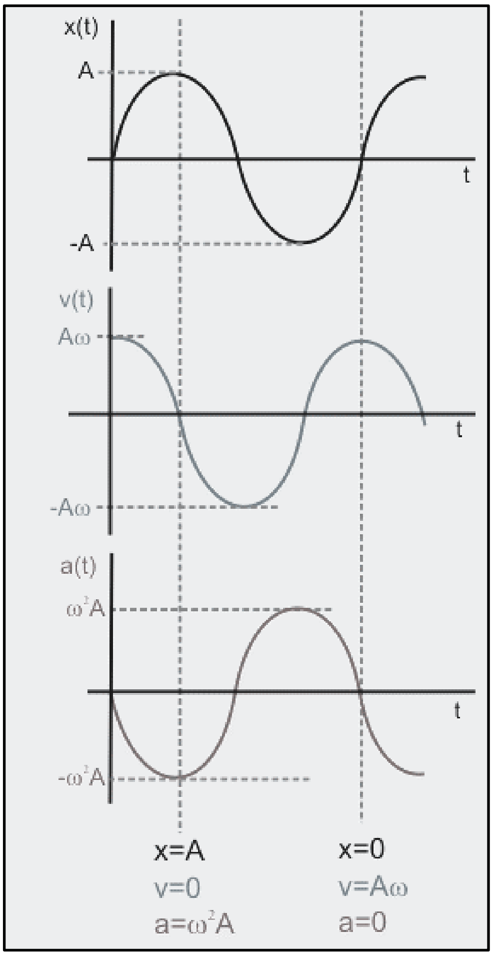
Para cuando la elongación es máxima:

x = A se tiene:

$\mathbf{a_{max} = -4\pi^2 f^2 A}$

ANÁLISIS DE LAS GRAFICAS EN EL M.A.S.

Las gráficas que las representan a la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo, respectivamente en el M.A.S son:



Las ecuaciones de la Velocidad y de la Aceleración son consecuencia de la gráfica de la Elongación, ya que estas se derivan de la anterior. Sin embargo, las ecuaciones también se las puede expresar como:

$x = A \cos(2\pi f t + \phi)$
$x = A \operatorname{sen}(2\pi f t + \phi)$

$v = -2\pi f A \operatorname{sen}(2\pi f t + \phi)$
$v = -2\pi f A \cos(2\pi f t + \phi)$

$a = -4\pi^2 f^2 A \cos(2\pi f t + \phi)$
$a = -4\pi^2 f^2 A \operatorname{sen}(2\pi f t + \phi)$

Esta se debe a que las gráficas de las funciones Seno y Coseno son iguales en su forma y sólo se encuentran desfasadas entre sí por un valor de $\phi = 90^0$ o $\phi = \frac{\pi}{2}$

Dada esta circunstancia se cumple la siguiente regla:

- Si la elongación se expresa en función del Seno, entonces la velocidad está en función del Coseno y la aceleración en función del Seno.
- Si la elongación se expresa en función del Coseno, la velocidad está en función del Seno y la aceleración en función del Coseno.

El uso de la función Seno o Coseno para expresar la elongación, depende del instante en que se comienza a contar una oscilación completa:

- Si inicia desde el punto de equilibrio la gráfica es sinusoidal.
- Si inicia desde cualquier punto de retorno, la gráfica es del tipo cosenoidal.

Es decir, cualquier forma de la gráfica describirá el Movimiento Armónico Simple de la partícula y sus propiedades particulares, ya que ambas formas son válidas.

También se puede concluir al graficas las siguientes características:

- La elongación y la velocidad están desfasadas un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ rad. Esto determina que (en módulo) la velocidad es mínima (nula) cuando la elongación es máxima y que la velocidad es máxima cuando la elongación es nula.
- La velocidad y la aceleración están también desfasadas $\frac{\pi}{2}$ rad. Ya que se puede observar (en módulo) que la velocidad es máxima cuando la aceleración es nula y que la velocidad es nula cuando la aceleración es máxima.
- La elongación y la aceleración están desfasadas por 0 rad (se dice que estas magnitudes están en oposición de fase). Esto significa que los módulos de ambas magnitudes se anulan y toman sus valores máximos simultáneamente, siendo sus sentidos opuestos en todo momento.
- La elongación, la velocidad y la aceleración varían periódicamente en el tiempo, pero no están en fase.
- La aceleración es proporcional a la elongación, pero de sentido opuesto.
- La frecuencia y el período del movimiento es independiente de la amplitud, ya que se considera al M.A.S. isócrono, es decir se produce, con intervalos o períodos de igual duración, o en tiempos de igual duración entre ellos.

EL PERIODO Y LA FRECUENCIA EN EL M. A. S.

A partir de la ecuación $a = -4\pi^2 f^2 x$, se puede deducir la ecuación de la frecuencia:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{a}{x}}$$

Ya que el desplazamiento y la aceleración siempre tienen signos opuesto, el término $-a/x$ siempre será positivo.

El período T es el reciproco de la frecuencia por lo que estará definido por:

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{x}{a}}$$

Cuando se considera el periodo de un resorte es conveniente expresarlo en función de la constante del resorte y de la masa del cuerpo en vibración.

$$F = m\,a \quad \text{y} \quad F = -k\,x$$

$$m\,a = -k\,x$$

$$a = \frac{-k}{m}x \; ; \text{ como: } a = -4\pi^2 f^2 x$$

$$4\pi^2 f^2 = \frac{k}{m}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

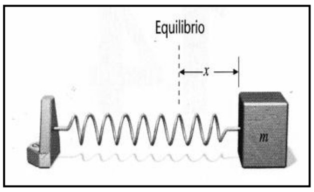
El periodo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una masa m se encuentra unido a un resorte colocado en forma horizontal. Se estira hacia la derecha una distancia de 6 cm y se suelta. Si regresa al punto donde se soltó y continua vibrando con M. A. S, dando 1 oscilación en 3s. Calcular:

   A) Su posición, velocidad y aceleración después de 5,2 s.



   B) Su velocidad y aceleración máxima.

   A) La posición, velocidad y aceleración serán:

   $f = \frac{n}{t}$; $f = \frac{1}{3s}$; f = 0,333 Hz

   x = A cos 2 π f t
   x = 6 cm cos [2 π(0,333 Hz)(5,2s)]
   x = 6 cm cos [10,78 rad]
   x = 6 cm cos ($617{,}65^0$)
   x = - 1,28 cm

   v = - 2 π f A sen 2 π f t.
   v = - 2 π (0,333 Hz)(6 cm) sen ($617{,}65^0$)
   v = 12,47 cm/s

   $a = -\ 4\pi^2 f^2 A \cos 2\pi f t$
   $a = -\ 4\pi^2 (0{,}333^2)(6\ cm) \cos (617{,}65^0)$
   $a = 5{,}62\ cm/s^2$

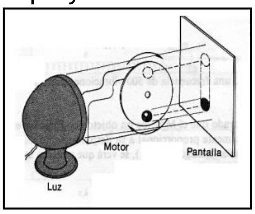
   B) La velocidad y aceleración máxima es:

   $v_{max} = -2\pi f A$; $v_{max} = -2\pi (0{,}333\ Hz)(6\ cm)$

   $v_{max} = -12{,}55$ cm/s

   $a_{max} = -4\pi^2 f^2 A;$
   $a_{max} = -4\pi^2 (0{,}333^2)(6\ cm)$
   $a_{max} = -\ 26{,}31\ cm/s^2$

2. Una pelota de hule se mueve en un círculo horizontal de 80 cm de diámetro y gira a 30 rpm. La sombra de la pelota se proyecta sobre una pared debido a una luz distante. Calcular: el periodo, la frecuencia, la amplitud de la sombra, la velocidad y aceleración máxima.



   El período y frecuencia será:

   30 rpm = 3,14 rad/s

   ω = 2 π f ; $f = \frac{\omega}{2\pi}$; $f = \frac{3{,}14\ rad/s}{2\pi}$; f = 0,5 Hz

   $T = \frac{1}{f}$; $T = \frac{1}{0{,}5\ Hz}$; T = 2 s

   Si el diámetro es igual a 80 cm entonces, y se sabe que R = A entonces:

   A = 40 cm

   La velocidad y aceleración máxima son:

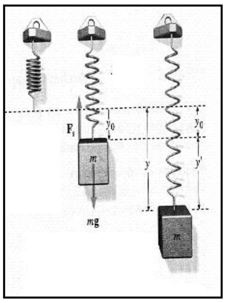
   $v_{max} = -2\pi f A$; $v_{max} = -2\pi (0{,}5\ Hz)(40\ cm)$

   $v_{max} = -125{,}66$ cm/s

   $a_{max} = -4\pi^2 f^2 A;$
   $a_{max} = -4\pi^2 (0{,}5^2)(40\ cm)$
   $a_{max} = -\ 394{,}78\ cm/s^2$

3. Una masa de 300 g se sujeta a un resorte helicoidal largo. Cuando se desplaza 10 cm, se encuentra que la masa vibra con un periodo de 2s. Calcular:

   A) La constante del resorte.
   B) La velocidad y aceleración cuando se mueve hacia arriba hasta un punto que se encuentra a 6 cm sobre su posición de equilibrio.



   A) Para la constante del resorte sabemos que en la posición de equilibrio se tiene:

   Σ F y = 0

   $P - F_e = 0$; $P = F_e$; m g = k x; entonces k es:

   $k = \frac{m\,g}{x}$; $k = \frac{(0{,}3\ kg)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)}{0{,}10\ m}$; k = 29,4 N/m

B) La velocidad es:

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$; $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{29{,}4\ N/m}{0{,}3\ kg}}$

f = 1,58 Hz.

$v = -2\pi f\ \sqrt{A^2 - x^2}$

$v = -2\pi(1{,}58\ Hz)\sqrt{(0{,}10m)^2 - (0{,}06m)^2}$

v = 0,79 m/s

$a = -4\pi^2 f^2 x$

$a = -4\pi^2 (1{,}58\ \text{Hz})^2 (0{,}06\text{m})$

$a = -6\ \text{m/s}^2$

4. Un cuerpo que describe un M. A. S. tiene una aceleración máxima de 48 m/s^2 y una rapidez máxima de 4 m/s . Calcular:

   A) Su periodo.
   B) Su amplitud de vibración.
   C) Su frecuencia angular o velocidad angular.
   D) Escribir la ecuación del desplazamiento.

   A) Si $a_{max} = -4\pi^2 f^2 A$; $a_{max} = 48\ \text{m/s}^2$

   $48\ \text{m/s}^2 = -4\pi^2 f^2 A \quad (1)$

   $v_{max} = -2\pi f A$; $v_{max} = 4\ \text{m/s}$

   $4\ \text{m/s} = -2\pi f A \quad (2)$

   Simplificamos ecuación (1) / (2)

   $$\frac{48\ \cancel{\text{m/s}}^2}{4\ \cancel{\text{m/s}}} = \frac{-4\pi^{\cancel{2}} f^{\cancel{2}} \cancel{A}}{-2\cancel{\pi}\cancel{f}\cancel{A}};$$

   f = 1,91 Hz

   $T = \frac{1}{f}$; $T = \frac{1}{1{,}91\ \text{Hz}}$; T = 0,52 s

   B) $v_{max} = -2\pi f A$; $A = \frac{v_{max}}{-2\pi f}$

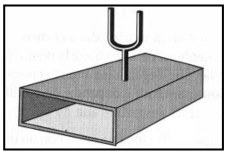
   $A = \frac{4\ \text{m/s}}{-2\pi\,(1{,}91\ \text{Hz})}$; A = 0,33 m

   C) $\omega = 2\pi f$; $\omega = 2\pi\,(1{,}91\ \text{Hz})$; $\omega = 12$ rad/s

   D) $x = A\cos 2\pi f t$

   $x = (0{,}33\ \text{m}) \cos 2\pi\,(1{,}91\ \text{Hz})\, t$

5. Una de las ramas de un diapasón vibra con una frecuencia de 330 Hz y una amplitud de 2 mm. ¿ Cuál es la velocidad cuando el desplazamiento es de 1,5 mm.



   La velocidad podemos determinar con:

   $v = -2\pi f \sqrt{A^2 - x^2}$
   $v = -2\pi\,(330\text{Hz}) \sqrt{(2\ \text{mm})^2 - (1{,}5\ \text{mm})^2}$
   $v = -2\,742{,}91$ mm/s

   El valor de esta rapidez nos permite entender por qué cuando vibra las ramas del diapasón son casi imperceptibles al ojo humano.

6. Un motor eléctrico de 20 kg se monta sobre cuatro resortes verticales, teniendo cada uno de ellos una constante de resorte de 30 N/cm. Calcular el periodo y frecuencia con el cual oscilará verticalmente

   La masa del motor se reparte en cada uno de los resortes(20 kg/ 4 = 5 kg) y la constante 30 N/cm es igual a 3 000 N/m; así tenemos que el periodo va a ser igual a:

   $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{5\ \text{kg}}{3\,000\ \text{N/m}}}$; T = 0,04 s

   La frecuencia:

   $f = \frac{1}{T}$; $f = \frac{1}{0{,}04\ s}$; f = 25 Hz

7. La ecuación del M.A.S. de una partícula Q de 20 g es: x = 5. sen (3. t) cm. Determinar:
   A) La amplitud del movimiento
   B) La frecuencia angular de oscilación o velocidad angular
   C) La frecuencia de oscilación
   D) La constante (k) de recuperación del movimiento.
   E) La velocidad de la partícula en t = 2s
   F) La aceleración de la partícula en t = 2s

   Se determina que:
   m = 20 g; m = 0,02kg
   t = 2s.
   A) Si igualamos las ecuaciones de la elongación se tiene:

   $x = A\ \text{sen}\,(2\pi f t + \phi)$
   $x = A\ \text{sen}\,(\omega .\ t)$
   $x = 5.\ \text{sen}\,(3.\ t)$

   Entonces: A = 5 cm

   B) Para: $\omega = 3$ rad/s
   C) Para la frecuencia:
   $f = \frac{\omega}{2\pi}$; $f = \frac{3\ \text{rad/s}}{2\pi}$; f = 0,48 Hz

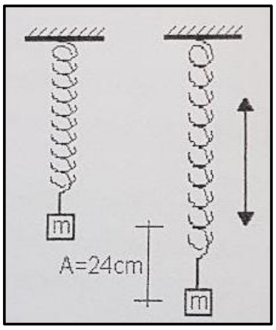
   D) Para la constante se tiene:
   $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$; $2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $(2\pi f)^2 = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2$

   $k = 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot m$;
   $k = 4\pi^2\,(0{,}48\ \text{Hz})^2 (0{,}02\text{kg})^2$ (m/m)
   k = 0,13 N/m

   E) $v = -2\pi f A\cos(2\pi f t + \phi)$
   $v = +\omega .\ A\cos(\omega .\ t)$ (+ ya que esta girando hacia la derecha)
   $v = 3$ rad/s. 0,05 m . cos (3 . 2. $180^0/\pi$)
   v = 0,14 m/s

F) $a = -4\pi^2 f^2 A \text{ sen } (2\pi f t + \phi)$
$a = +\omega^2 . A \text{ sen } (\omega . t)$
$a = (3 \text{ rad/s})^2 . 0{,}05 \text{ m.sen } ((3 . 2)(180^0/\pi))$
$a = -0{,}04 \text{ m/s}^2$

8. Una masa de 10 g se mueve con movimiento armónico simple de 24 cm de amplitud y 4 s de período. El desplazamiento es + 24 cm, para t = 0 s. Determinar:
   A) La posición de la masa cuando t = 0,5 s
   B) El tiempo mínimo necesario para que la masa se mueva desde la posición inicial a un punto x = - 12 cm.
   C) La velocidad y aceleración de dicha masa cuando x = - 12 cm.



Se determina que:
m = 10 g; m = 0,010 kg
A = 24 cm: A = 0,24 m
T = 4s
x_o = 24 cm para t = 0 s
t = 0,5 s

A) Para determinar la posición de la masa:
$T = \frac{2\pi}{\omega}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$;
$\omega = \frac{2\pi}{4 \text{ s}}$; $\omega = 1{,}57$ rad/s

$x = A \cos(\omega . t)$

$x = 0{,}24 \text{ m} \cos ((1{,}57 . 0{,}5)(180^0/\pi))$

$x = 0{,}17$ m

B) El tiempo se determina a partir de:

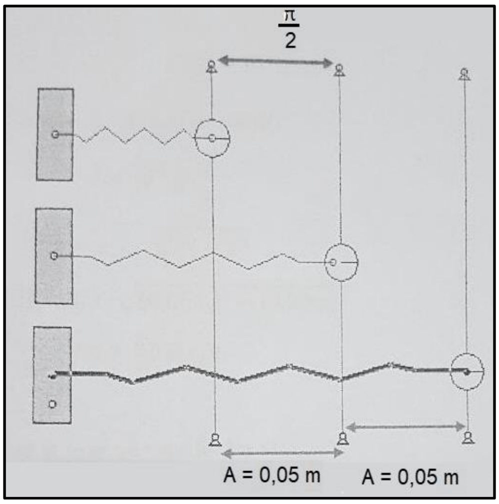
$x = A \cos (\omega . t)$; $t = \frac{cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)}{\omega}$

$$t = \frac{\left(cos^{-1}\left(\frac{-0{,}12\, m}{0{,}24\, m}\right)\right)\frac{\pi\, rad}{180^O}}{1{,}57\, rad/s}; t = 1{,}33 \text{ s}$$

C) $v = -A . \omega \text{ sen } (\omega . t)$
$v = -0{,}24 . 1{,}57 \text{ sen } ((1{,}57 . 1{,}33)(180^0/\pi))$
$v = -0{,}33$ m/s

$a = -\omega^2 . A \cos (\omega . t)$
$a = -(1{,}57)^2 . 0{,}24 . \text{sen } ((1{,}57 . 1{,}33)(180^0/\pi))$
$a = -0{,}56 \text{ m/s}^2$

9. Una masa de 2 kg está unida un resorte horizontal cuya constante de recuperación es de 10 N/m, el resorte se comprime 5 cm desde la posición de equilibrio y se deja en libertad. Determinar:
   A) La expresión de la posición de la masa en función del tiempo.
   B) Los módulos de la velocidad y la aceleración de la masa en un punto situado a 2cm de la posición de equilibrio.



A) Se conoce que la A = 5 cm, A = 0,05 m
La masa m = 2 kg
La constante k = 10 N/m

La ecuación general para la elongación con fase es:

$x = A \cos (\omega . t + \phi)$
$x = 0{,}05 \text{ m} \cos (\omega . t - \frac{\pi}{2})$
$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$; $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Al igualar las ecuaciones se tiene:

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega = \sqrt{\frac{10 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}}$; $\omega = 2{,}24$ rad/s

La ecuación de la elongación queda finalmente como:

$$x = 0{,}05 \text{ m} \cos (2{,}24 . t - \frac{\pi}{2})$$

B) La velocidad se la puede calcular con:

$$v = -2\pi f \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$v = 2{,}24 \text{ rad/s} \sqrt{(0{,}05)^2 - (0{,}02)^2}$.

$v = 0{,}10$ m/s

$v = -\,\omega.\, A.\, \text{sen}\,(\omega\,.\,t - \frac{\pi}{2})$

$0{,}10 = -\,(2{,}24)\,(0{,}05)\,\text{sen}\,(2{,}24\,t - \frac{\pi}{2})$

$0{,}10\text{m} = -0{,}11\text{ m sen}\,(2{,}24\,t - \frac{\pi}{2})$

$$t = \frac{\left(sen^{-1}\left(\frac{0{,}10\,m}{-\,0{,}11m}\right)\right)\frac{\pi\,rad}{180^{o}} + \frac{\pi}{2}\text{rad}}{2{,}24\,rad/s}$$

$t = 0{,}19$ s

La aceleración se la calcula con:

$a = -\,\omega^2 A \cos(\omega\, t + \phi)$

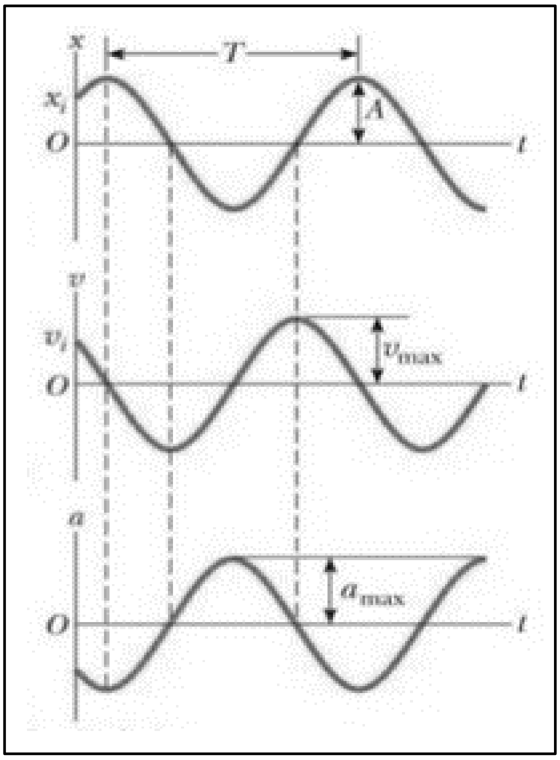
$a = -(2{,}24)^2.\ 0{,}05 \cos((2{,}24.\ 0{,}19\ - \frac{\pi}{2})\ (180^0/\pi))$

$a = -\,0{,}10$ m/s^2

10. Analizar las gráficas siguientes:

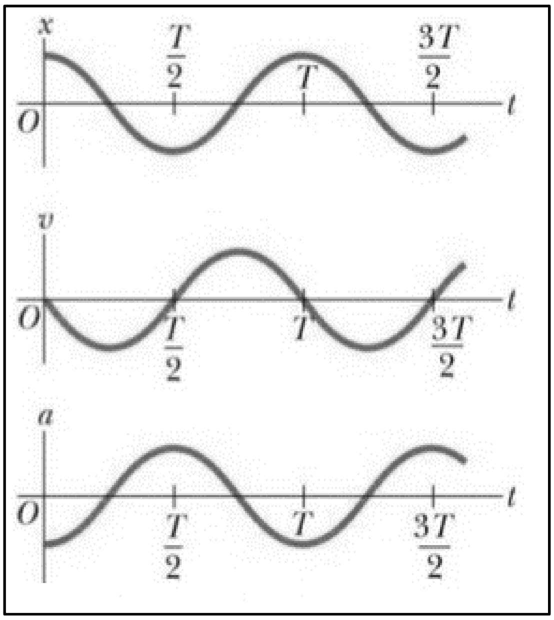
Al observar las gráficas se puede concluir lo siguiente:

- La velocidad tiene un desface de 90^0 o π/2 rad con respecto al desplazamiento.
- La aceleración tiene un desface de 180^0 o π rad con respecto al desplazamiento.



11. Analizar las gráficas siguientes:

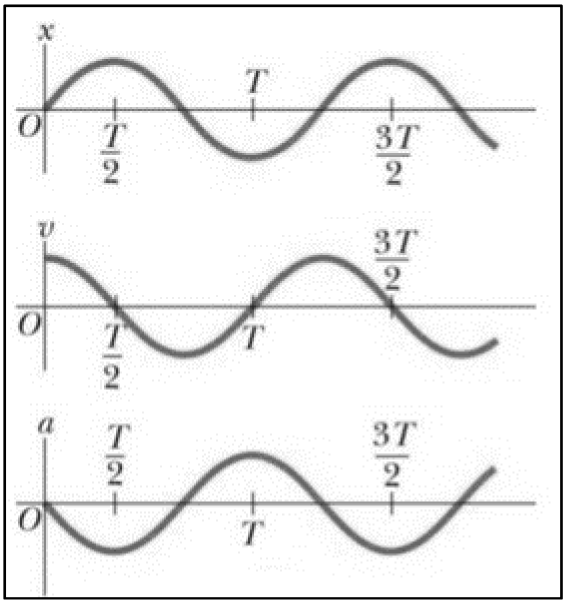
Al observar las gráficas se puede concluir lo siguiente:



- Las condiciones iniciales son:
  x(O) = A y v(O) = 0
- El ángulo de fase es ϕ = 0 rad
- La velocidad en X = 0 es:
  v = ± ω. A
- La aceleración en A es:
  a = ± ω^2. A

12. Analizar las gráficas siguientes:

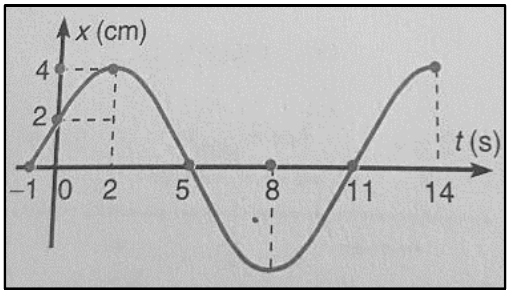
Al observar las gráficas se puede concluir lo siguiente:



- Las condiciones iniciales son:
  x(O) = 0 y v(O) = v_i
- El valor del ángulo de fase es: ϕ = - π/2 rad

- El gráfico de la aceleración esta corrido un cuarto de ciclo a la derecha con relación al caso x(O) = A. (elongación)

13. En la gráfica se representa un M.A.S. de ecuación: x = A sen (ωt + ϕ). Determinar los valores de A, ω, ϕ



De acuerdo a la grafica se determina que A es la elongación máxima y es igual a 4 cm. El período T es el tiempo que gasta en regresar a su posición inicial.

T = 11 – (-1); T = 12 s

También se puede analizar de un máximo a otro máximo:

T = 14 – 2; T = 12 s

LA frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{T};\ \omega = \frac{2\,\pi}{12};\ \omega = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad/s}$$

La fase inicial ϕ se deduce de las condiciones iniciales para t = 0 s y x = 2 cm; por lo tanto:

$$x = A\ \mathrm{sen}\ (\ \omega t + \ \phi)$$
$$2 = 4\ \mathrm{sen}\ \left(\frac{\pi}{6}\ .0 + \ \phi\right)$$
$$2 = 4\ \mathrm{sen}\ (\phi)$$
$$\mathrm{sen}\ (\phi) = \frac{2}{4}$$
$$\phi = 30^0;\ \phi = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad}$$

También se determina que t = -1 s y x = 0 m:

$$0 = 4\ \mathrm{sen}\ \left(\frac{\pi}{6}\ .(-1) + \ \phi\right)$$
$$0 = -\ \frac{\pi}{6} + \phi$$
$$\phi = \frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad};\ \phi = 30^0;$$

EJERCICIOS PARA LA TAREA

1. Una rueda de bicicleta se mueve en forma horizontal de 90 cm de diámetro y gira a 40 rad / s . La sombra de la rueda se proyecta sobre una pared debido al sol. Calcular: el periodo, la frecuencia, la amplitud de la sombra, la velocidad y aceleración máxima.

2. Una masa de 10 lb se sujeta a un resorte helicoidal largo. Cuando se desplaza 4 pulg, se encuentra que la masa vibra con un periodo de 4s. Calcular:
   A) La constante del resorte.
   B) La velocidad y aceleración cuando se mueve hacia arriba hasta un punto que se encuentra a 3 pulg sobre su posición de equilibrio.

3. Una de las ramas de un diapasón vibra con una frecuencia de 120 Hz y una amplitud de 3 mm. ¿Cuál es la velocidad cuando el desplazamiento es de 2 mm.

4. Una masa de 1,2 kg se encuentra unido a un resorte colocado en forma horizontal. Se estira hacia la derecha una distancia de 8 cm y se suelta. a) Si regresa al punto donde se soltó y continúa vibrando con M. A. a 2 oscilaciones cada 10 s. Calcular:
   A) Su posición, velocidad y aceleración después de 7 s.
   B) Cuál es su velocidad máxima.
   C) Cuál es su aceleración máxima.

5. Una pelota de hule se mueve en un círculo de 10 in de radio y gira a 200 rpm, ¿ Cuál es la frecuencia de su proyección, de su amplitud y de su velocidad máxima.

6. Un oscilador armónico de amplitud 10 cm, de frecuencia angular 5 rad/s, tiene una posición x = 0 para t = 0.
   A) ¿Cuál es la ecuación del movimiento?
   B) ¿Cuál es su velocidad máxima y la aceleración máxima de este oscilador?

7. Las personas experimentan movimientos vibratorios cuando viajan en autos, aviones, trenes, usan máquinas potentes o escuchan música moderna exageradamente amplificada. Experimentos de laboratorio muestran que una aceleración de 6,3 m/s^2, para una frecuencia de 5,5 Hz, es muy peligrosa para los órganos humanos, como corazón, pulmones y cerebro. Determinar la amplitud que se produce en los órganos humanos.

8. Los resortes de un automóvil de 1000 kg se comprime 1,3 cm, cuando un hombre de 110 kg se sube. Con el hombre en el interior, determinar el periodo de vibración del carro cuando pasa por una piedra.

9. La ecuación de un M.A.S. es x(t) = 2 cos (30π.t), donde x es la elongación en cm y t en s. Determinar:
   A) Los valores de A y ω
   B) La posición de una partícula con este movimiento a los 10 s

C) El período del movimiento.
D) La velocidad de la partícula a los 10s
E) La aceleración de la partícula a los 10s

10. La aceleración (en m/s^2) de un M.A.S. en función de la elongación (en m) es: a = -126 x. Expresar esta aceleración en función del tiempo sabiendo que la amplitud de la vibración es de 3,5 cm. Considere nula la constante de fase.

11. Una partícula efectúa un movimiento armónico simple cuyo período es igual a 1 s. Sabiendo que en el instante t = 0 su elongación es de 0,70 cm y su velocidad es de 4,39 cm/s. Determinar:
A) La amplitud del movimiento y la fase inicial
B) La máxima aceleración de la partícula.

12. Determinar la diferencia de fase entre los siguientes movimientos:
A) $\mathrm{x} = 4\cos 5\mathrm{t}$; $\mathrm{x} = 6\cos 5\mathrm{t}$
B) $\mathrm{x} = 4\cos 5\mathrm{t}$; $\mathrm{x} = 6\cos(5\mathrm{t} + 3)$
C) $\mathrm{x} = 4\cos 5\mathrm{t}$; $\mathrm{x} = 6\,\mathrm{sen}\,5\mathrm{t}$